கணிதம் - துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆர். அனுமந்த ராவ்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் - 211

கணிதம் - துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

ர. அனுமந்த ராவ், எம்.ஏ.

பேராசிரியர், கணிதத்துறை

சா. கோ. கலைக் கல்லூரி, கோவை

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—November, 1969

B.T.P. No. 211

© Bureau of Tamil Publications

Mathematics Ancillary for B.Sc.,
R. HANUMANTHA RAO

Net Price Rs. 6–00
(No discount)

Printed by
Manickam Press,
Madras-29

அணிந்துரை

(திரு இரா. நெடுஞ்செழியன், *தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்*)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), *1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.*

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'கணிதம்-துணைப்பாடம்'** *என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின்* 211*ஆவது வெளியீடாகும். இது வரை* 246 *நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.*

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக..

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

இயற்கணிதம் (Algebra)

பக்கம்

1. பகுதி பின்னங்கள் (Partial fractions) ... 1
2. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (Binomial theorem)... 10
3. அடுக்குக் குறித் தொடர் (Exponential Series) ... 29
4. மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series) ... 41
5. அணிக்கோவை (Determinant) ... 52
6. சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குத் தோராயமான மதிப்புகள் (Approximation to Roots of an Equation) ... 69
7. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of Equations)... 76
8. நிகழ்தகவு (Probability) ... 79

விடைகள் (Answers) ... 89

வகைநுண் கணிதம்

1. சார்புகள் (Functions) ... 97
2. எல்லைகள் (Limits) ... 102
3. வகைக் கெழு (Differential Coefficient) ... 111

நேர்மாறு சார்பின் வகைக்கெழு (Differentiation of Inverse Function) ... 127

அதிபரவளைச் சார்புகளின் வகைக் கெழு (Differentiation of Hyperbolic Function) ... 129

மடக்கை எடுத்து வகைக் கெழு (Logarithmic Differentiation) ... 134

கோண கணிதமூலம் உருமாற்றங்களால் வகைக்கெழு (Differentiation by Trigonometric Transformation) ... 137

உட்படு சார்பின் வகைக் கெழு (Differential Coefficient of Implicit Function) ... 139

துணையலகு சமன்பாடுகளின் வகைக் கெழு (Differential Coefficient of Parametric Equations) 141

ஒரு சார்பைப் பொருத்த மற்ருெரு சார்பின் வகைக் கெழு (Differentiation of one Function with Respect Another) ... 143

தொடர் வகைக் கெழு காணுதல் (Successive differentiation) ... 147

4. வகைக் கெழுவின் பொருள் (Meaning of the Derivative) ... 158

தொடுவரையும் செங்கோடும் (Tangent and Normal)... 160

தொடுகோட்டடி, வரைகோட்டடி (Subtangent and Subnormal) ... 172

மாறிகளின் மாறு விதம் (Rate of change of variables) ... 174

திசை வேகமும், திசை வேக மாறுவீதமும் (Velocity and Acceleration) ... 177

5. மீப்பெரு மதிப்பும் மீச்சிறு மதிப்பும் (Maxima and Minima) ... 180

6. பகுப்பு வகைக் கெழு காணும் முறை (Partial differentiation) ... 192

7. பிழைகளும் தோராயங்களும் (Errors and Approximations) ... 198

8. வளைவு (Curvature) ... 203

விடைகள் (Answers) ... 208

தொகை நுண்கணிதம்

1. தொகை காணல் (Integration) ... 219

தொகை காணத் திட்ட முறைகள் (Standard Methods of Integration) ... 223

ஈடு செய்து தொகை காணல் (Integration by Substitution) ... 223

விகிதமுறு இயற்கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Rational Algebraic Functions) ... 232

கோண கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Trigonometric Functions) ... 239

விகிதமுறாத சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Irrational Functions) ... 247

பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல் (Integration by Parts) ... 255

2. வரையறுத்த தொகை (Definite Integral) ... 261

3. வரையறைத் தொகை பயன்படும் இடங்கள் (Applications of Definite Integrals)—பரப்புகள் (Areas) ... 271

சுற்றுவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் (Volume of Solid of Revolution) ... 278

சுற்றுவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் புறப்பரப்பு (Surface Area of Solid of Revolution) ... 282

வளைவரையின் நீளங்கள் (Lengths of Curves) ... 284

4. புவி ஈர்ப்பு மையம் (Centre of Gravity) ... 287

5. நிலைம திருப்பத் திறன் (Moment of Inertia) ... 295

6. வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் (Differential Equations) 302

நேரிய சமன்பாடுகள் (Linear Equations) ... 314

இருவரிசை முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடு (Linear Differential Equations of the Second Order) ... 320

7. தணித்த அலைவுகளும், அதிர்வுகளும் (Damped Oscillations and Forced Vibrations) ... 332

8. ஃபூரியர் தொடரில் தொகைநுண் கணிதத்தின் ஈடுபாடு (Application of Integration to Fourier Series) ... 335

விடைகள் ... 338

சென்னைப் பல்கலைக் கழக வினாத்தாள்கள் ... 358

கலைச் சொற்கள் ... 378

இயற்கணிதம்

1. பகுதி பின்னங்கள்
(Partial Fractions)

1·1. கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு சார்பை (Rational function), பல எளிய பகுதி பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதும் முறையைத்தான் நாம் இந்தப் பகுதியில் ஆராய முற்படுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}$ என்ற எளிய பின்னங்களின் கூடுதல் $=\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}$ ஆகிறது.

$$\therefore \quad \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1} \text{ ஆகும்.}$$

இதில், $\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}$ என்ற பின்னத்தை, எளிய இரண்டு பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதமுடியும் என்பதைக் காணமுடிகிறது. பொதுவாக, $f(x)$, $\phi(x)$ என்ற இரண்டு விகிதமுறு, பல்லுறுப்புக் கோவையாகில், $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ என்ற பின்னத்தை, சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்குகையில், பல எளிய பின்னங்களின் கூடுதலாகப் பெற முடியும். இங்கு $f(x)$ம் $\phi(x)$ம், மெய்யெண்களை (real) கெழுக்களாகவுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials). $f(x)$ன் படி (degree) $\phi(x)$ன் படியைவிடக் குறைவாக இருத்தல் அவசியம்.

1·2. விகிதமுறு பின்னங்களைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல்: பலவித அமைப்புகளும் அவைகளின் தத்துவங்களும்:

விகிதமுறு பின்னத்தின் உருவம் $\frac{P}{Q}$ ஆகவிருக்கட்டும்.

இங்கு P யும், Q வும் முன்கூறிய வண்ணம் x ன் பல்லுறுப்புக் கோவைகள். $\frac{P}{Q}$ ஒரு தகுபின்னமாகவிருக்க வேண்டும் (Proper fraction). பகுதி பின்னங்களின் பகுதிகள் Q ன் சினைகள் ஆவன. Q ன் சினைகள் பல அமைப்புகளைப் பெற்றதாகவிருக்கும்.

அமைப்பு 1 : Q, $(ax+b)$ மாதிரி மடங்குத் தன்மையைப் பெறாத (non repeated) சினைகளை உடையதாகவிருக்கட்டும். அப்பொழுது $Q = (ax+b)$ R. இங்கு R ம், $(ax+b)$ யும் பகாத் தன்மையைப் பெற்றதாக விருக்கட்டும் (Prime to each other).

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{X}{ax+b} + \frac{Y}{R}$$

இங்கு X ன் படி, $(ax+b)$ ன் படியை விடக் குறைவு. ஆனால் $(ax+b)$ ன் படி ஒன்று. ஆகவே X ன் படி பூச்சியமாகும். ஆகவே அது மாறிலி (constant) ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{A}{ax+b} + \frac{Y}{R}. \quad \text{ஆகவே}$$

Q ன், $(ax+b)$ மாதிரியான ஒவ்வொரு சினைக்கும் ஒரு மாறிலியைத் தொகுதியாகப் பெற்ற ஒரு பின்னம் உருப்படும். மாறிலியின் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

அமைப்பு 2 : Q. $(ax+b)^r$ மாதிரியான மடங்குச்சினை (repeated factor) உடையதாகவிருக்கட்டும். அப்பொழுது $Q = (ax+b)^r$. R. இங்கு $(ax+b)^r$ ம் R ம், பகா இனங்கள் ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{X}{(ax+b)^r} + \frac{Y}{R}$$

இங்கு X ம் Y ம், $(ax+b)^r$, R ஐ விடக் குறைவான படிகளைப் பெற்றதாகவிருத்தல் ஆகும். X ன் படி, அதிகப்படியாக இருப்பின் $(r-1)$ ஆக இருக்க வேண்டும். X ஐ

$$A_{r-1}\,(ax+b)^{r-1} + A_{r-2}\,(ax+b)^{r-2} + \ldots\ldots + A_1$$

ஆக எழுதலாம். இங்கு $A_1, A_2 \ldots\ldots A^{r-1}$ மாறிலிகள்.

$$\therefore \quad \frac{X}{(ax+b)^r} = \frac{A_{r-1}}{(ax+b)} + \frac{A_{r-2}}{(ax+b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{(ax+b)^r}$$

அமைப்பு 3 : Q, மடங்குத் தன்மையைப் பெருத, $(px^2 + qx + r)$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைச் சினையாகப் பெறுதல்.

இங்கு $Q = (px^2 + qx + r)R$. Rம், $(px^2 + qx + r)$ ம் பகா இனங்கள்.

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{X}{px^2+qx+r} + \frac{Y}{R}$$

Xம், Y ம், $(px^2 + qx + r)$, R ஐ விடக் குறைவான படிகளை உடையன.

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{Ax+B}{px^2+qx+r} + \frac{Y}{R} \text{ ஆகிறது.}$$

ஆகவே, (px^2+qx+r) ன் தொகுதி, $(Ax+B)$ என்ற உருவத்தைப் பெறும். இங்கு A, B உரிய மாறிலிகள்.

அமைப்பு 4 : Q, $(px^2+qx+r)^m$ ஐ ப்போன்ற, இருபடிக் கோவையின் மடங்குத்தன்மையை உடையதாகவிருத்தல்.

$$Q = (px^2+qx+r)^m \cdot R$$

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{X}{(px^2+qx+r)^m} + \frac{Y}{R}$$

இங்கு X ன் படி, அதிகப்படியாகவிருப்பின், $(2m-1)$ ஆகவிருக்கலாம். X ஐ

$$(A_1x+B_1)(px^2+qx+r)^{m-1} + (A_2x+B_2)(px^2+qx+r)^{m-2} + \ldots\ldots + (A_mx+B_m) \text{ ஆக எழுதலாம்.}$$

$$\therefore \quad \frac{X}{(px^2+qx+r)^m} = \frac{A_1x+B_1}{(px^2+qx+r)} + \ldots\ldots + \frac{A_mx+B_m}{(px^2+qx+r)^m}$$

முக்கிய குறிப்பு : $\frac{P}{Q}$ தகாபின்னமாகில், P ஐ, Q ஆல் வகுத்து, பின்னர் வரும் மீதிக்குத்தான் பகுதி பின்னங்கள் காண வேண்டும்.

பின் வரும் மாதிரிகளைக் காண்பின் மேற்கூறியவை சிறப் புறப் புரியும்.

(a) முதல் அமைப்பு (First type). இங்கு $\phi(x)$, x ஐப் பொருத்த ஒருபடி சினைகளின் (linear factors) பெருக்குத் தொகையாகவிருந்தால், கையாளவேண்டிய வழிமுறை :

மாதிரி.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி :

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x^2+x-1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$x=1$ ஈடாக்கினால், $2A = 1$

$$A = \frac{1}{2}$$

$x=2$ ஈடாக்கினால், $-B = 5$

$$B = -5$$

$x=3$, ஈடாக்கினால், $2C = 11$

$$C = \frac{11}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{5}{x-2} + \frac{11}{2(x-3)}$$

1·3. அமைப்பு 2 : (Second Type):

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி:

$$\frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)}$$

$$\frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{(1+2x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x \equiv A(1+2x)(1-3x) + B(1-3x) + C(1+2x)^2$$

$x = -\frac{1}{2}$ ஈடாக்கினல், $\frac{5B}{2} = -\frac{1}{2}$

$$B = -\frac{1}{5}$$

$x = \frac{1}{3}$ ஈடாக்கினல், $\frac{25}{9}C = \frac{1}{3}$

$$C = \frac{3}{25}$$

$x = 0,$ ஈடாக்கினல்,

$$A+B+C=0$$

$$A - \frac{1}{5} + \frac{3}{25} = 0$$

$$A = \frac{2}{25}$$

$$\frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)} = \frac{2}{25(1+2x)} - \frac{1}{5(1+2x)^2} + \frac{3}{25(1-3x)}$$

1·4. அமைப்பு (III Type): $\phi(x)$ ல் சினைகளாகப் பிரிக்க முடியாத இருபடிச் சமன்பாடு இருத்தல்.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி.

$$\frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$$

$\frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x^2-3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)$$

$x = 0$ க்கு ஈடாக்கினல்

$-3 = A + 2C \ldots\ldots$ (1)

$x = 1$ க்கு ஈடாக்கினல்

$-2 = 2A + (B+C)\,3$

$-2 = 2A + 3B + 3C \ldots\ldots$ (2)

$x = -2$ க்கு ஈடாக்கினுல்

$$1 = 5A$$

$$A = \frac{1}{5} \ldots\ldots \qquad (3)$$

$$-3 - \frac{1}{5} = 2C$$

$$C = -\frac{8}{5}$$

$$-2 = \frac{2}{5} - \frac{24}{5} + 3B$$

$$-2 - \frac{2}{5} + \frac{24}{5} = 3B$$

$$3B = \frac{12}{5}$$

$$B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{5(x+2)} + \frac{\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{5(x+2)} + \frac{4x-8}{5(x^2+1)}$$

மாதிரி.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{x^4+4x^3+7}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4+4x^3+7}{(x-1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

எனக் கொள்ள வேண்டும்.

$$x^4+4x^3+7 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

$x = 1$ ஆகவிருந்தால்,

$$12 = 4A$$

$$\therefore \quad \underline{A = 3} \ldots\ldots \qquad (1)$$

x^4 ன் கெழுவை இருபக்கங்களிலும் சமப்படுத்தினல்

$$1 = A+B$$

$$\therefore \quad \underline{B = -2} \ldots\ldots \qquad (2)$$

x^3 ன் கெழுவைச் சமப்படுத்தினல்,

$$4 = -B+C$$

$$\therefore \quad C = 2 \ldots\ldots \qquad (3)$$

x^2 ன் கெழுவைச் சமப்படுத்தினல்,

$$0 = 2A + B - C + D$$

$$= 6-2-2+D$$

$$= 2+D$$

$$D = -2 \ldots\ldots \qquad (4)$$

மாறிலியை ஈடாக்கினல்,

$$7 = A - C - E$$

$$= 3-2-E$$

$$= 1-E$$

$$E = -6 \ldots\ldots \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{x^4+4x^3+7}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{x-1} - \frac{2x-2}{x^2+1} - \frac{2x+6}{(x^2+1)^2}$$

1·5 வகை 2: இங்கு $\phi(x)$ ம், $f(x)$ ம் ஒரு படித்தாகவோ, அல்லது $f(x)$, $\phi(x)$ ஐவிட அதிகப்படியான படி (degree) பெற்றதாகவோ அல்லது சமமான படி உடையதாகவோ இருக்கும். இம்மாதிரி யிருப்பின் பகுதி பின்னங்களாகக் கையாளும் வழிமுறை.

இங்கு $\phi(x)$ ன் படி $f(x)$ ன் படிக்குச் சமமாகவோ, குறைவாகவோ இருப்பின், $f(x)$ ஐ, $\phi(x)$ ஆல் வகுக்கவேண்டும். ஈவு $Q(x)$ ஆகவும், மீதி $R(x)$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{\phi(x)}$$

$R(x)$ ன் படி, $\phi(x)$ ன் படியை விடக் குறைவாக இருக்குமாதலால், $\frac{R(x)}{\phi(x)}$ ஐப் பகுதி பின்னங்களாகப் போட முடியும். $f(x)$ ன் படியும், $\phi(x)$ ன் படியும் சமமாக விருந்தால், ஈவு ஒரு மாறிலியாக அமையும்.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\frac{x^3}{x^3+1}$.

$$\frac{x^3}{x^3+1} = A + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$x^3 = A(x^3+1) + B(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)$$

x^3 ன் கெழுக்களைச் சமமாக்கினால்

$$A = 1$$

x^2 ன் கெழுக்களைச் சமமாக்கினால்

$$B + C = 0$$

x ன் கெழுக்களைச் சமமாக்கினால்

$$-B + C + D = 0$$

மாறிலி இருபக்கங்களிலும் சமமாக்கினால்

$$A + B + D = 0$$

$$B + D = -1$$

$x = -1$ க்கு ஈடாக்கினால்

$$3B = -1$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad D = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad A = 1; \; B = -\frac{1}{3}; \; C = \frac{1}{3}; \; D = -\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$$

பயிற்சி 1

கீழ்வருபவைகளைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

1. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

2. $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$

3. $\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$

4. $\dfrac{5x+2}{(1+3x)(1+2x)}$

5. $\dfrac{3-7x^2}{(1-3x)(1+2x)(1+x)}$

6. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$

7. $\dfrac{1}{(1+x)^3(1-x)}$

8. $\dfrac{1}{x^3(x+2)}$

9. $\dfrac{x^3}{(x+1)^2(x^2+1)}$

10. $\dfrac{x}{(1+x^2)(3-2x)}$

11. $\dfrac{3x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

12. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

13. $\dfrac{(2x-3)(1-5x)(6x+1)}{(4x-1)\,3}$

14. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$

15. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \dfrac{A}{1-ax} + \dfrac{B}{1-bx}$ ஆனல்

$$\frac{1}{(1-ax)^2(1-bx)} = \frac{A}{(1-ax)^2} + \frac{AB}{1-ax} + \frac{B^2}{1-bx}$$

என நிருபி.

2. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

(Binomial Theorem)

2·1 n மிகை எண்ணாகவிருந்தால்,

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1\,!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2\,!} a^{n-2} x^2 +$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,!} a^{n-r} x^r + \ldots\ldots + x^n$$

இந்த விரிப்பில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. இந்த ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் எல்லா விகிதமுறு அடுக்குகளுக்கும் விஸ்தரிக்கலாம். ஆகவே, எல்லா விகிதமுறு அடுக்குகளுக்கும் ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் என்னவென்றால், n விகிதமுறு எண்ணாகில், $|x| < 1$ இருக்கும் பொழுது

$$1 + \frac{n}{1\,!} \cdot x + \frac{n(n-1)}{2\,!} \cdot x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,!} x^r + \ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடரின் கூடுதல் $(1+x)^n$ ன் மெய்மிகை மதிப்பாகும்.

தெரிப்பு (Proof): இத் தொடரின் கூடுதலை $f(n)$ எனக் கொள்வோம்.

$$f(n) = 1 + \frac{n_1}{1\,!} \cdot x + \frac{n_2}{2\,!} \cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{n_r}{r\,!} \cdot x^r + \ldots\ldots$$

இத்தொடர் $|x| < 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது அறவொருங்கல் (Absolutely convergent) தன்மையைப் பெறும். அதேமாதிரி

$$f(m) = 1 + \frac{m_1}{1!} \cdot x + \frac{m_2}{2!} x^2 + \ldots\ldots + \frac{m_r}{r!} x^r + \ldots\ldots$$

$$f(m+n) = 1 + \frac{(m+n)_1}{1!} x + \frac{(m+n)_2}{2!} x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(m+n)_r}{r!} \cdot x^r + \ldots\ldots$$

(இத்தொடரும் $|x| < 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது அறவொருங்கல் தன்மையைப் பெறும்).

$\therefore$ $f(m)$ ஐயும், $f(n)$ ஐயும் நாம் பெருக்கலாம். பெருக்குதலால் ஏற்படும் தொடரும் $|x| < 1$ ஆகவிருக்கும்பொழுது அறவொருங்கல் தன்மையைப்பெறும்.

$f(m)$ ஐயும் $f(n)$ ஐயும் பெருக்கிவரும் தொடரில் x^r ன் கெழு

$$= \frac{m_r}{r!} + \frac{m_{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{n_1}{1!} + \frac{m_{r-2}}{(r-2)!} \cdot \frac{n_2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{n_r}{r!}$$

$$= \frac{1}{r!} \{m_r + r\,C_1 \cdot m_{r-1}\, n_1 + rC_2\, m_{r-2}\, n_2 + \ldots\ldots + n_r\}$$

$$= \frac{(m+n)_r}{r!}$$ [வாண்டர்மாண்டேயின் தேற்றத்தை உபயோகித்துள்ளோம்]

$f(m+n)$ என்ற தொடரில் x^r ன் கெழு $= \dfrac{(m+r)_r}{r!}$.

$\therefore$ $f(m) \cdot f(n) = f(m+n)$ $\{m, n$ ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மை, $|x| < 1\}$

மேலும்,

$f(m) \cdot f(n) \cdot f(p) = f(m+n+p)$ ஆகும்.

$\therefore$ $f(m) \cdot f(n) \cdot f(p) \ldots\ldots s$ பகுப்புகள்
$= f(m+n+p+\ldots\ldots s$ உறுப்புகள்)

உட்பிரிவு (case) 1: 'n' மிகை பின்னமாகவிருக்கட்டும்.

$n = \dfrac{r}{s}$ ஆகவிருக்கட்டும். r, s மிகை முழு எண்களாகவிருக்கட்டும்.

$$f(r) = (1+x)^r \text{ [r மிகை எண்]}$$

$$\therefore \quad f(0) = 1$$

$$f(1) = (1+x)$$

$$f\left(\frac{r}{s}\right) \cdot f\left(\frac{r}{s}\right) \ldots\ldots s \text{ பகுப்புகள்}$$

$$= f\left(\frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \ldots\ldots s \text{ உறுப்புகள்}\right)$$

$$\left[f\left(\frac{r}{s}\right)\right]^s = f\left(\frac{r}{s} \cdot s\right) = f(r)$$

$$= (1+x)^r$$

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = (1+x)^{r/s}$$

$$\therefore \quad f(n) = (1+x)^n \text{ ஆகிறது.}$$

உட்பிரிவு (case) 2: 'n' விகிதமுறு குறை எண்ணாக விருக்கட்டும் (negative rational number). $n = -m$ ஆகவிருக் கட்டும். இங்கு 'm' மிகை விகிதமுறு எண்ணாகவிருக்கட்டும்.

$$f(m) \cdot f(n) = f(m+n)$$

$$= f(m-m) = f(0)$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad f(n) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1+x)^m}$$

$$= (1+x)^{-m} = (1+x)^n$$

ஆகவே, இத்தேற்றம், குறை குறியீட்டிற்கும் உண்மை யாகிறது. ஆகவேதான் ஈருறுப்புத் தேற்றம் எந்த விகிதமுறு குறியீட்டிற்கும் உண்மையாகும்.

சில முக்கியமான விரித்தல்கள் :

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots\ldots + (-1)^r x^r + \ldots\ldots$

2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^r + \ldots\ldots$

3. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \ldots\ldots + (-1)^r (r+1) x^r + \ldots\ldots$

4. $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+ \ldots\ldots + (r+1)\, x^r + \ldots\ldots$

5. $(1+x)^{-n} = 1 - \dfrac{n}{1\,!} x + \dfrac{n\,(n+1)}{2\,!} x^2 - \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3\,!} x^3$

$+ \ldots\ldots + (-1)^r \,.\, \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r\,!} x^r + \ldots\ldots$

6. $(1-x)^{-n} = 1 + \dfrac{n}{1\,!} x + \dfrac{n\,(n+1)}{2\,!} \,.\, x^2 + \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3\,!} x^3$

$+ \ldots\ldots + \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r\,!} x^r + \ldots\ldots$

7. $(1+x)^{-p/q} = 1 - \dfrac{p}{1\,!} \cdot \dfrac{x}{q} + \dfrac{p+q}{2!}\left(\dfrac{x}{q}\right)^2 - \ldots\ldots$

$+ \dfrac{(-1)^r \,.\, p\,(p+q)\,(p+2q)\ldots\ldots(p+\overline{r-1}q)}{r\,!} \cdot \left(\dfrac{x}{q}\right)^r + \ldots\ldots$

8. $(1-x)^{-p/q} = 1 + \dfrac{p}{1\,!} \cdot \dfrac{x}{q} + \dfrac{p\,(p+q)}{2\,!}\left(\dfrac{x}{q}\right)^2 + \ldots\ldots$

$+ \dfrac{p\,(p+q)\,(p+2q)\ldots\ldots(p+\overline{r-1}q)}{r\,!}\left(\dfrac{x}{q}\right)^r + \ldots\ldots$

மாதிரி 1.

$(1+x)^{2/3}$ ன் விரிப்பில் பொது உறுப்பைக் காண்க.

$(r+1)^{th}$ உறுப்பைத்தான் பொது உறுப்பு எனக் கூறு வோம்.

$$(r+1)^{th} \text{ உறுப்பு} = \frac{\frac{2}{3}\,(\frac{2}{3}-1)\,(\frac{2}{3}-2)\ldots\ldots(\frac{2}{3}-r+1)}{r\,!} \,.\, x^r$$

$$= \frac{2\,(-1)\,(-4)\,(-7)\ldots\ldots(-3r+5)}{3^r \,.\, r\,!} x^r$$

$$= \frac{(-1)^{r-1} \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \ldots\ldots (3r-5)}{3^r \,.\, r\,!} \,.\, x^r$$

மாதிரி 2.

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots)^2$ விரிப்பில் x^r ன் கெழு $\dfrac{1}{6}(r+1)\,(r+2)\,(r+3)$ என நிறுவுக.

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots)^2$$

$$= [\,(1 - x)^{-2}\,]^2$$

$$= (1 - x)^{-4}$$

$$= 1 + 4x + \frac{4\,.\,5}{2\,!}\,.\,x^2 + \frac{4\,.\,5\,.\,6}{3\,!}\,x^3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{3\,!}\,.\,x^n + \ldots\ldots$$

x^r ன் கெழு $= \dfrac{(r+1)\,(r+2)\,(r+3)}{6}$

மாதிரி 3.

$a + \dfrac{b}{1+2x} + \dfrac{c}{1 - 3x^2}$ என்ற கோவை

$1 + x + 2x^2 + \ldots\ldots$ என்ற விரிப்பைப் பெறுகிறது,

a, b, c ன் மதிப்புகளைக் காண்க. (x மிகச் சிறியது).

$$a + \frac{b}{1+2x} + \frac{c}{1 - 3x^2}$$

$$= a + b\,(1+2x)^{-1} + c\,(1 - 3x^2)^{-1}$$

$$= a + b\,(1 - 2x + 4x^2\,\ldots\ldots)$$

$$+ c\,(1 + 3x^2 + 9x^4 + \ldots\ldots)$$

விரிப்பு $\equiv 1 + x + 2x^2 + \ldots\ldots$ ஆனல் மாறிலியைச் சமன் படுத்திஞல்

$$a + b + c = 1 \ldots\ldots \qquad (1)$$

x ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்திஞல்

$$-\,2b = 1 \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\therefore\quad b = -\,\frac{1}{2}$$

x^2 ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்திஞல்

$$4b + 3c = 2 \ldots\ldots \qquad (3)$$

$$-2+3c = 2$$

$$c = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{6}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{4}{3}$$

மாதிரி 4.

n மிகை எண்ணாகவிருந்து, $\frac{(3x-2)^n}{(1-x)^2}$ என்பதின் விரிப்பில் x^n ன் கெழு $1-2n$ என நிரூபி.

$$\frac{(3x-2)^n}{(1-x)^2} = \frac{\{1-3(1-x)\}^n}{(1-x)^2}$$

தொகுதி $= 1 - 3n(1-x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^2 (1-x)^2 -$ $(1-x)$ ன் மூன்றுக்கு மேலான அடுக்குகளை உடைய உறுப்புக்கள்.

பின்னம் $= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3n}{1-x} + (1-x)$ ன் $(n-2)$ அடுக்கு வரையிலும் உள்ள உறுப்புக்கள்

$= (1-x)^{-2} - 3n(1-x)^{-1} + x^n$ இல்லாத உறுப்புக்கள்

$= \{1+2x+3x^2+ \ldots\ldots + (n+1)x^n + \ldots\ldots\}$

$= 3n(1+x+x^2+ \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots) + x^n$ இல்லாத உறுப்புக்கள்

$= (n+1) - 3n$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் x^n ன் கெழு

$= 1 - 2n$

மாதிரி 5.

$\dfrac{x+2}{(x-2)(x-1)^2}$ என்பதை xன் ஏறு அடுக்குகளில் விரித்து எழுதினுல், அதில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

எனில், $x+2 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2)$

$x = 1$, ஈடாக்கினுல், $3 = -C$

$C = -3$

$x = 2$, ஈடாக்கினுல், $4 = A$

$\therefore\ A = 4$

$x = 3$, ஈடாக்கினுல் $5 = 4A + 2B + C$

$= 13 + 2B$

$\underline{B = -4}$

$$\therefore\ \frac{x+2}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{1-\frac{x}{2}} + \frac{4}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$= -2\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} + 4(1-x)^{-1} - 3(1-x)^{-2}$$

x^n ன் கெழு $= -2 \cdot \dfrac{1}{2^n} + 4 - 3(n+1) = 1 - 3n - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

பயிற்சி 2

1. கீழ்வரும் விரிப்புகளில் பொது உறுப்பைக் காண்க.

(i) $(1+x)^{-1/2}$ (ii) $(1-4x)^{-1/2}$

(iii) $\left(1-\dfrac{2}{3}x\right)^{3/4}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

2. $\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-x)^4}$ ன் விரிப்பில், x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

3. $(1+2x)^3 (1-x)^{-2}$ ன் விரிப்பில், x^n ன் கெழு $27(n-1)$ எனக் காண்க. $(n > 2)$

4. $\dfrac{a}{(1-x)^2} + \dfrac{b}{(2+3x)^2}$ ன் விரிப்பில் முதல் இரண்டு உறுப்புக்கள் $(1+x)$ ஆக விருந்தால் a, b ஐக் கண்டுபிடித்து, x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

5. $\dfrac{1+2x}{1-x+x^2}$ விரிப்பில், x^n ன் கெழு,

$n = 3m,\ 3m+1,\ 3m+2$ உருவத்தைப் பெற்ருல்

$(-1)^{n/3},\ 3(-1)^{n-1/3},\ 2(-1)^{n-2/3}$ ஆகும்

என நிருபி.

6. n மிகை எண்ணுகவிருந்து $\dfrac{(1+2x)^n}{1-x}$ என்பதன் விரிப்பில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

7. $\dfrac{(1-2x)^n}{1-3x}$ என்பதன் விரிப்பில் x^n ன் கெழு 1 என நிருபி.

8. $\dfrac{1}{(1-2x)(1+3x)}$ என்பதை x ன் ஏறு அடுக்குகளாக விரித்து, அதில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

9. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2 (x-2)}$ ன் விரிப்பில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

10. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2 (2x+3)}$ ஐ பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும். x ன் ஏறு அடுக்கில் விரித்து x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

2·2. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை உபயோகித்துத் தொடர் கூட்டல் (Application of the Binomial Theorem to the Summation of Series).

தொடர் கூட்டல் காணும் முறையில் $(1-x)^{-p/q}$ என்ற வாய்பாடு மிகவும் உபயோகமாக விருக்கும்.

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \frac{p}{1\,!} \cdot \left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p\,(p+q)}{2\,!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{p\,(p+q)\,(p+2q)\,\ldots\ldots\,(p+\overline{r-1}q)}{r\,!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \ldots\ldots$$

கவனிக்கவேண்டிய குறிப்புகள் :

(1) இந்த விரிப்பு $\left(\frac{x}{q}\right)$ ன் அடுக்குகளில் அமைந்துள்ளது.

(2) தொகுதியிலும், பகுதியிலும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் பெருக்கம் இருக்கும்.

(3) தொகுதியிலுள்ள எண்கள் தமக்குள் கூட்டுத்தொட (Arithmetic Progression) ரில் அமையும்.

(4) $\left(\frac{x}{q}\right)$ ன் அடுக்கு, தொகுதியிலுள்ள எண்கள் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவிருக்கும்.

மாதிரி 1.

எண்ணிலிக்குக் கூட்டுக :

$$1 + \frac{2}{6} + \frac{2\,.\,5}{6\,.\,12} + \frac{2\,.\,5\,.\,8}{6\,.\,12\,.\,18} + \ldots\ldots$$

தொடர் கூட்டலை S என்க.

$$S = 1 + \frac{2}{1\,!} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2\,.\,5}{1\,.\,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2\,.\,5\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{2}{1\,!} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2\,.\,5}{2\,!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \ldots\ldots$$

இத்தொடரை $(1-x)^{-p/q}$ உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \frac{p}{1\,!} \cdot \frac{x}{q} + \frac{p\,(p+q)}{2\,!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \ldots\ldots$$

இங்கு $p = 2$

$$q = 3$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad S = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2/3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3}$$

$$= \underline{2^{2/3}}$$

மாதிரி 2.

எண்ணிலிக்குக் கூட்டுக :

$$\Sigma \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots\ldots (3n-2)}{n\,!} \cdot \frac{1}{4^n}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் முறை தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்புகளும் கிடைக்கும். தொடர் கூட்டல் S ஆகவிருக்கட்டும்.

$$S = \frac{1}{1\,!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{2\,!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3\,!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{1\,!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{2\,!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\ldots\right) - 1$$

தொடரை $(1-x)^{-p/q}$ உடன் ஒப்பிட்டுப் பிரித்தால்

$$p = 1$$

$$q = 3$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad S = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-1/3} - 1$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/3} - 1$$

$$= 4^{1/3} - 1$$

மாதிரி 3.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1 + n\left(\frac{2x}{1+x}\right) + \frac{n\,(n+1)}{2\,!}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 + \ldots\ldots$$

வலப்பக்கத்தை $(1 - x')^{-p/q}$ உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில்,

$$p = n$$

$$q = 1$$

$$\frac{x'}{q} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\therefore \quad x' = \frac{2x}{1+x}$$

$$\therefore \quad S = \left(1 - \frac{2x}{1+x}\right)^{n/1}$$

$$= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

மாதிரி 4.

எண்ணிலிக்குக் கூட்டுத்தொகை காண்க:

$$\frac{3}{2\,.\,4} + \frac{3\,.\,4}{2\,.\,4\,.\,6} + \frac{3\,.\,4\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} + \ldots\ldots$$

கூட்டுத்தொகை S என்க.

$$S = \frac{3}{2\,.\,4} + \frac{3\,.\,4}{2\,.\,4\,.\,6} + \frac{3\,.\,4\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} + \ldots\ldots$$

$$= \left[\frac{3}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,2} + \frac{3\,.\,4}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,2\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \left[\frac{3}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,.\,3}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{1}\,.\,\frac{1}{2} + \frac{2\,.\,3}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots - 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2/1} - 2\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\,.\,(2)^2$$

$$= -1 + 2$$

$$= \underline{1}$$

பயிற்சி 3

ஈண்ணிலிக்குக் கூட்டுக.

1. $1 + \frac{3}{4} + \frac{3\,.\,5}{4\,.\,8} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12} + \ldots\ldots$

2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{3\,.\,6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{3\,.\,6\,.\,9} + \ldots\ldots$

3. $1 + \frac{2}{1!}\,.\,\frac{1}{6} + \frac{2\,.\,5}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2\,.\,5\,.\,8}{3!}\,.\,\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \ldots\ldots$

4. $1 + 2\,.\,\frac{1}{3^2} + \frac{2\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,\frac{1}{3^4} + \frac{2\,.\,5\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{1}{3^6} + \ldots\ldots$

5. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1\,.\,4}{5\,.\,10} - \frac{1\,.\,4\,.\,7}{5\,.\,10\,.\,15} + \ldots\ldots = \frac{5^{1/3}}{2}$

6. $1 - \frac{3}{4} + \frac{3\,.\,5}{4\,.\,8} - \frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12} + \ldots\ldots$

7. $\frac{3}{4}+\frac{3\,.\,5}{4\,.\,8}+\frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12}+\frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{4\,.\,8\,.\,12\,.\,16}+\ldots\ldots$

8. $\frac{2}{6}+\frac{2\,.\,5}{6\,.\,12}+\frac{2\,.\,5\,.\,8}{6\,.\,12\,.\,18}+\ldots\ldots$

9. $\frac{5}{3\,.\,6}+\frac{5\,.\,7}{3\,.\,6\,.\,9}+\frac{5\,.\,7\,.\,9}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}+\ldots\ldots$

10. $\frac{1}{6}+\frac{5}{6\,.\,12}+\frac{5\,.\,8}{6\,.\,12\,.\,18}+\frac{5\,.\,8\,.\,11}{6\,.\,12\,.\,18\,.\,24}+\ldots\ldots$

11. $\frac{5}{3\,.\,6}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}\cdot\frac{1}{4^3}+\frac{5\,.\,8\,.\,11}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}\cdot\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots$

12. $1+n\left(\frac{2n}{1+n}\right)+\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{2n}{1+n}\right)^2+\ldots\ldots$

$$=1+n\,.\,\frac{2n}{1-n}+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{2n}{1-n}\right)^2+\ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

13. $x^n=1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\ldots\ldots$

14. $\frac{1}{1-2x-3x^2}$ ஐ இரண்டு வெவ்வேறு முறைகளில் விரிப்பைக் கணித்து

$$2^n+(n-1)\,.\,3\,.\,2^{n-2}+\frac{(n-2)\,(n-3)}{2\,!}\,.\,3^2\,.\,2^{n-4}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\,[\,3^{n+1}+(-1)^n\,]$$ என நிறுவுக.

15. $\frac{1}{1-x-6x^2}$ ஐ இரண்டு பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதி, பின்னர்

$$1+(n-1)\cdot 6+\frac{(n-2)\,(n-3)}{2\,!}\cdot 6^2+\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{3\,!}\cdot 6^3+\ldots$$

$$=\frac{1}{5}\,[\,3^{n+1}+(-1)^{n+1}\,.\,2^{n+1}\,]$$ என நிறுவுக.

2·3. தோராயமானங்கள் (Approximations).

மாதிரி 1.

$(1{\cdot}01)^{1/2}-({\cdot}99)^{1/2}$ ன் மதிப்பைத் தசம பின்னத்தில் 6 இடங்களுக்குத் திருத்தமாக எழுதவும்.

$x = {\cdot}01$ என்க.

$$(1{\cdot}01)^{1/2} = (1+{\cdot}01)^{1/2} = (1+x)^{1/2}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\,.\,x+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\,!}\,.\,x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\,!}\,.\,x^3+\ldots\ldots$$

$$({\cdot}99)^{1/2} = (1-{\cdot}01)^{1/2} = (1-x)^{1/2}$$

$$= 1-\frac{1}{2}\,.\,x+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\,!}\,.\,x^2-\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\,!}\,.\,x^3+\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad (1{\cdot}01)^{1/2}-({\cdot}99)^{1/2}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{16}\,x^3+\frac{7}{256}\,.\,x^5+\ldots\ldots\right\}$$

$$= x+\frac{x^3}{8}+\frac{7}{128}\,x^5+\ldots\ldots$$

$$= ({\cdot}01)+\frac{1}{8}\,({\cdot}01)^3+\frac{7}{128}\,({\cdot}01)^5+\ldots\ldots$$

$= ({\cdot}01)+\frac{1}{8}\;({\cdot}000001)+$ 6 க்கு மேல்பட்ட தசம ஸ்தானங்களை உடையவை

$$= {\cdot}01+{\cdot}000000125$$

$$= {\cdot}010000125$$

$= {\cdot}010000$ (ஆறு ஸ்தானங்களுக்குத் திருத்தமாக)

மாதிரி 2.

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$ ஐ நான்கு தசம ஸ்தானத்திற்குச் சுத்தமாக மதிப்பிடுக.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{128}} = (128)^{-1/3}$$

$$= (125 + 3)^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{5}(1 + \cdot 024)^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{5}\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(\cdot 024) + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2\,!}(\cdot 024)^2 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[1 - \cdot 008 + \frac{2}{9}(\cdot 024)^2 - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[1 - \cdot 008 + \cdot 000128 - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\cdot 992128\right]$$

$$= \cdot 198424$$

$= \cdot 1984$ (நான்கு தசம ஸ்தானச் சுத்தமாக).

மாதிரி 3.

l ஐப் பொருத்து c மிகச் சிறியதாகின் $\left(\frac{c}{l}\right)$ ன், நான்கும் அதற்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளையும் விட்டால்,

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}} + \sqrt{\frac{l}{l-c}} = 2 + \frac{3c^2}{4l^2}$$ என நிறுவுக.

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}} = \left(\sqrt{\frac{l+c}{l}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{c}{l}\right)^{-1/2}$$

$$\sqrt{\frac{l}{l-c}} = \left(\sqrt{\frac{l-c}{l}}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{c}{l}\right)^{-1/2}$$

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}} + \sqrt{\frac{l}{l-c}} = \left(1 + \frac{c}{l}\right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{c}{l}\right)^{-1/2}$$

$$= \left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{l}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{c}{l}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{l}\right) + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{c}{l}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{3c^2}{8l^2}$$

$$= 2 + \frac{3c^2}{4l^2}$$

மாதிரி 4.

x மிகப் பெரியதாயின், தோராயமாக

$$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = \frac{3}{2x}\left(1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{21}{8x^4}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

x பெரியதாயின், $\frac{1}{x}$ மிகச் சிறியதாகும்,

$$\sqrt{x^2+4} = x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{x^2+1} = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}$$

$$= x\left[\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$= x\left[\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} \cdot \left(\frac{4}{x^3}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\left(\frac{4}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}\right.$$

$$\left. - \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}\right]$$

$$= x\left[\left\{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^6} \ldots\ldots\right\} - \left\{1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{16x^6} \ldots\ldots\right\}\right]$$

$$= x\left[\frac{3}{2x^2} - \frac{15}{8x^4} + \frac{63}{16x^6} - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{3}{2x} - \frac{15}{8x^3} + \frac{63}{16x^5}$$

$$= \frac{3}{2x}\left(1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{21}{8x^4}\right)$$

பயிற்சி 4

1. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை உபயோகித்து $\sqrt{3{\cdot}96}$ ன் மதிப்பை 5 தசமஸ்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடுக.

2. $(998)^{1/3}$ ன் மதிப்பை 3 தசமஸ்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

3. 126 ன் கனமூலத்தை 5 தசமஸ்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

4. $\left(1 + \frac{1}{64}\right)^{1/3}$ ன் விரிப்பை எழுதி, 65 ன் கன மூலத்தை 3 தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடுக.

5. $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\,(1 + {\cdot}024)^{1/3}$ என்று நிரூபித்து, 2 ன் கன மூலத்தை 4 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

6. $\frac{1}{(9998)^{1/4}}$ ன் மதிப்பை 6 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

7. $\left(\frac{0{\cdot}998}{1{\cdot}002}\right)^{-2/3}$ ன் மதிப்பை 4 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடுக.

8. $(1{\cdot}02)^{3/2} - (0{\cdot}98)^{3/2}$ ன் மதிப்பை 6 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

9. $\sqrt[3]{1003} - \sqrt[3]{997}$ ன் மதிப்பை 5 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

10. x சிறியதாயின், அதன் இருபடியையும் அதன் அதிக அடுக்குகளையும் விட்டால், $(1-7x)^{1/3}(1+2x)^{-3/4}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. x சிறியதாயின், அதன் இருபடியையும், அதிக அடுக்குகளையும் விட்டால் $\dfrac{(9+2x)^{1/2}(3+4x)}{\sqrt[5]{1-x}} = 9+\dfrac{74}{5}x$ என நிருபி.

12. x சிறியதாயின், அதன் கனங்களையும் அதிகப்படியான அடுக்குகளையும் விட்டால் $\dfrac{(1-x)^{-3/2}-(1+x)^{3/2}}{6+9x} = \dfrac{x^2}{4}$ என நிருபி.

13. x சிறியதாயின், தோராயமாக

$$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{7}{64}x^4$$ என நிருபி.

14. x சிறியதாயின், தோராயமாக

$$\frac{(1-3x)^{-2/3}+(1-4x)^{-3/4}}{(1-3x)^{-1/3}+(1-4x)^{-1/4}} = 1+\frac{3x}{2}+4x^2$$ என நிருபி.

15. x பெரிய மதிப்புகளாகின், $\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+9} = \dfrac{7}{2x}$ என நிறுவுக.

16. x சிறியதாக விருக்கும்பொழுது $\dfrac{2+x}{4}+\dfrac{1+x}{2+x}$ ன் தோராயமான மதிப்பு $\sqrt{1+x}$ ன் தோராயமான மதிப்புக்குச் சமம் என்று கூறும் வகையில் ஏற்படும் பிழை $\dfrac{x^4}{2^7}$ என நிறுவுக.

17. $t\,.\sqrt{\dfrac{g}{l}} = \mathrm{T}\,.\sqrt{\dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{L}}}$ என்றிருந்து, L, G ன் மதிப்புகள், l, g ன் மதிப்புகளிலிருந்து சிறிதளவே வேறுபட்டால், தோராயமாக $\dfrac{\mathrm{T}-t}{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{L}-l}{\mathrm{L}} - \dfrac{\mathrm{G}-g}{\mathrm{G}}\right]$ என நிருபி.

18. $2l$ நீளமுள்ள காந்தக்கம்பியின் ஈர்ப்புச்சக்தி H எனவும், அதன் மையத்திலிருந்து x தூரத்திலுள்ள புள்ளியில் நிலைமதிருப்பத்திறன் M ஆகவும் இருந்தால்

$$\frac{M}{2l}\left[\frac{1}{(x-l)^2}-\frac{1}{(x+l)^2}\right]$$

x ஐப் பொருத்து, l சிறியதாகவிருந்தால், H தோராயமாக $\frac{2M}{x^3}$ க்குச் சமம் எனக் காண்க.

3. அடுக்குக் குறித்தொடர்

(Exponential series)

3·1. $1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots\ldots+\frac{1}{r\,!}+\ldots\ldots$

என்ற தொடரின் எண்ணற்ற உறுப்புகளின் கூடுதலை 'e' என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\therefore \quad e=1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots\ldots+\frac{1}{r\,!}+\ldots\ldots\infty$$

5 தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாக 'e'ன் மதிப்பு 2·71828 ஆகும்.

அடுக்குக் குறித்தேற்றம்: எல்லா xன் விகிதமுறுமதிப்புகளுக்கும்

$$\left(1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\,!}+\ldots\ldots\right)^x$$
$$=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n\,!}+\ldots\ldots$$

தெரிப்பு:

$$f(x)=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n\,!}+\ldots\ldots \text{ என்க.}$$

இந்தத் தொடர் xன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்கலாகும். ஆகவே

$$f(m)=1+\frac{m}{1\,!}+\frac{m^2}{2\,!}+\ldots\ldots+\frac{m^r}{r\,!}+\ldots\ldots$$

$$f(n) = 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{n^r}{r!} + \ldots\ldots$$

$f(m)$ ஐயும், $f(n)$ ஐயும் நாம் பெருக்கலாம்.

$$f(m) \,.\, f(n) = \left\{1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{m^r}{r!} + \ldots\ldots\right\}$$

$$\times \left\{1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{n^r}{r!} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= 1 + \left(\frac{m}{1!} + \frac{n}{1!}\right) + \left(\frac{m^2}{2!} + \frac{mn}{1!\,1!} + \frac{n^2}{2!}\right)$$

$$+ \left(\frac{m^3}{3!} + \frac{m^2}{2!} \cdot \frac{n}{1!} + \frac{m}{1!} \cdot \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!}\right) + \ldots\ldots$$

பெருக்கற் பலனில் $(r+1)^{th}$ உறுப்பு யாதெனில்

$$\frac{m^r}{r!} + \frac{m^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{n}{1!} + \frac{m^{r-2}}{(r-2)!} \cdot \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m^2}{2!} \cdot \frac{n^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{m}{1!} \cdot \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{n^r}{r!}$$

$$= \frac{1}{r!} \left\{m^r + rc_1\, m^{r-1} \,.\, n + rc_2\, m^{r-2}\, n^2 + \ldots\ldots + n^r\right\}$$

$$= \frac{1}{r!} \,(m+n)^r$$

$$\therefore\ f(m) \,.\, f(n) = 1 + \frac{(m+n)}{1!} + \frac{(m+n)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(m+n)^r}{r!} + \ldots\ldots$$

$$= f(m+n)$$

உட்பிரிவு 1: x மிகை எண்ணாகவிருக்கட்டும். தெரிப்பில் நிருபித்தவண்ணம்,

$f(m) \,.\, f(n) \,.\, f(p)$ ...... x பகுப்புக்கள்

$= f\,(m+n+p+$ ...... $+\ x$ உறுப்புகள்$)$

$m = n = p =$ ...... $= 1$, என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்;

$f(1) \,.\, f(1)$ ...... x பகுப்புகள்

$= f\,(1+1+$ ...... $+\ x$ உறுப்புகள்$)$

$\{f(1)\}^x = f(x)$

உட்பிரிவு 2: x ன் மதிப்பு $\frac{p}{q}$ என்ற மிகை பின்னத்திற்குச் சமமாகவிருக்கட்டும். இங்கு p, q மிகை எண்களாகவிருக்கட்டும்.

$$\left\{ f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \ldots\ldots q \text{ பகுப்புகள்.}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots\ldots q \text{ உறுப்புகள்}\right)$$

$$= f(p)$$

$$= [f(1)]^p$$

$$\therefore \quad \left\{ f(1) \right\}^{p/q} = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\therefore \quad \left\{ f(1) \right\}^{x} = f(x)$$

உட்பிரிவு 3: x குறை எண்ணுகவிருக்கட்டும். $x = -s$ ஆகவிருக்கட்டும். இங்கு 's' மிகை எண்ணுகவிருக்கட்டும்.

$$f(s) \times f(-s) = f(s-s) = f(0) = 1$$

$$\therefore f(-s) = \frac{1}{f(s)}$$

$$= \frac{1}{[f(1)]^s}$$

$$= [f(1)]^{-s}$$

$$= [f(1)]^x$$

ஆகவே x எம்மதிப்பைப் பெறினும்

$$[f(1)]^x = f(x)$$

ஆனல் $\quad f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots$

$$\therefore \; 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\right)^x$$

பி. குறிப்பு : $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots=e$ என்பதால்

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots$$

முக்கிய குறிப்புகள் :

(1) $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\ldots\ldots+(-1)^r.\frac{x^r}{r!}+\ldots\ldots$

(2) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots+\frac{x^{2r}}{2r!}+\ldots\ldots$

(3) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots+\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\ldots\ldots$

(4) $a^x=e^{x\log a}$

$$=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{(x\log a)^r}{r!}+\ldots\ldots$$

மாதிரி 1.

$\frac{1+2x+3x^2}{e^x}$ ன் விரிப்பில் x^nன் கெழுவைக் காண்க.

$$\frac{1+2x+3x^2}{e^x}=(1+2x+3x^2)e^{-x}$$

$$=(1+2x+3x^2)\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n-2}.x^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}.x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n.x^n}{n!}+\ldots\ldots\right)$$

x^n ன் கெழு

$$=\frac{(-1)^n}{n!}+2.\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{3(-1)^{n-2}}{(n-2)!}.$$

மாதிரி 2.

$1+\frac{b+ax}{1!}+\frac{(b+ax)^2}{2!}+\ldots\ldots$ என்ற எண்ணிலி உறுப்புகளை உடைய தொடரில் x^n ன் கெழு $\frac{e^b.a^n}{n!}$ எனக் காண்க.

$$1+\frac{(b+ax)}{1!}+\frac{(b+ax)^2}{2!}+\ldots\ldots\infty$$

$$= e^{(b+ax)}$$

$$= e^b \, . \, e^{ax}$$

$$= e^b\left[1+\frac{(ax)}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{(ax)^n}{n!}+\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{e^b \, . \, a^n}{n!}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் x^n ன் கெழு $= \dfrac{e^b \, . \, a^n}{n!}$

மாதிரி 3.

$$\frac{e^2-1}{e^2+1}=\frac{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots\ldots}{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots}$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots \text{ எனவும்}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots \text{ எனவும்}$$

நாம் கண்டோம். இங்கு $x=1$ ஐ ஈடாக்கினல்,

$$\frac{e^1-e^{-1}}{2}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots\ldots$$

$$\frac{e^1+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots$$

$$\text{வலப்பக்கம்} = \frac{\frac{e^1-e^{-1}}{2}}{\frac{e^1+e^{-1}}{2}}$$

$$= \frac{e-\frac{1}{e}}{e+\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

பயிற்சி 5

1. $\dfrac{2+3x}{e^{2x}}$ ன் விரிப்பில் x^r ன் கெழு $\dfrac{(-1)^r \cdot 2^{r-1}(4-3r)}{r\,!}$ எனக் காண்க.

2. $\dfrac{1+2x-3x^2}{e^x}$ ன் விரிப்பில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

3. $\dfrac{a+bx}{e^x}$ ன் விரிப்பில் x^n ன் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

4. $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{(2+3x)^n}{n\,!}$ ல் x^n ன் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

5. $\dfrac{2x+\sqrt{9-3x^2}}{3-x}$ ன் x-ன் ஏறு அடுக்குகளில் எழுதப்படும் விரிப்பில், x ன் சிறிய மதிப்பிற்கு x^4 வரையிலும் விரிப்பை எழுதினால், தோராயமாக அது e^x க்குச் சமம் என நிரூபி.

6. $(1-x)\,e^{1+x}$ விரிப்பில், x ன் ஏறு அடுக்கில் எழுதுகையில், x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

7. $1+\dfrac{1+2x}{1\,!}+\dfrac{(1+2x)^2}{2\,!}+\ldots\ldots+\dfrac{(1+2x)^n}{n\,!}+\ldots\ldots\infty$

என்ற விரிப்பில் x^n ன் கெழு $\dfrac{2^n \cdot e}{n\,!}$ எனக் காண்க.

8. $(\log 2)-\dfrac{1}{2\,!}(\log 2)^2+\dfrac{1}{3\,!}(\log 2)^3\ldots\ldots\infty=\dfrac{1}{2}$ எனக் காண்பிக்கவும்.

9. $\left[1+\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^4}{4\,!}+\dfrac{x^6}{6\,!}+\ldots\ldots\right]^2$ ன் விரிப்பில் x^{10} ன் கெழுவைக் காண்க.

10. $\left(1+\dfrac{1}{2\,!}+\dfrac{1}{4\,!}+\ldots\ldots\right)^2=1+\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots\ldots\right)^2$ எனக் காண்க.

3·2. அடுக்குக்குறித் தேற்றத்தை உபயோகித்துத் தொடர் கூட்டல் முறை (Summation by using exponential theorem).

மாதிரி 1.

$$1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\ldots\ldots$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தொடரின் n^{th} உறுப்பு u_n ஆகவும், எண்ணிலிக்குத் தொடர் கூட்டல் S ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$u_n = \frac{1+3+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^{n-1}}{n!}$$

$$u_n = \frac{1}{n!}\cdot\left\{\frac{3^n-1}{3-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3^n}{n!}-\frac{1}{n!}\right]$$

$n=1, 2, 3$ ...... மதிப்புகளை ஈடாக்கினால் முதல் உறுப்பு, இரண்டாம் உறுப்பு, ... n ஆம் உறுப்புகளைப் பெறலாம்.

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{3^1}{1!}-\frac{1}{1!}\right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3^2}{2!}-\frac{1}{2!}\right]$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{3^3}{3!}-\frac{1}{3!}\right]$$

... ...

... ...

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{3^n}{n!}-\frac{1}{n!}\right]$$

... ...

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}\left[\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots\ldots\frac{3^n}{n!}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - 1) - \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - e)$$

$$= \frac{1}{2}e(e^2 - 1)$$

மாதிரி 2.

எண்ணிலிக்குக் கூடுதல் காண்க.

$$\frac{3^2}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{7^2}{3!} + \frac{9^2}{4!} + \ldots\ldots$$

n^{th} உறுப்பு, $u_n = \dfrac{(2n+1)^2}{n!}$

$$\frac{(2n+1)^2}{n!} \equiv \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

எனக் கொள்வோம்.

[வலப்பக்கத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் u_n ன் உள்ள தொகுதியின் படியைவிட ஒன்று அதிகம்].

$(2n+1)^2 \equiv A + Bn + Cn(n-1)$

$n = 0$ க்கு ஈடாக்கினல், $A = 1$

$n = 1$ க்கு ஈடாக்கினல், $A + B = 9$

$\underline{B = 8}$

$n = 2$ க்கு ஈடாக்கினல், $A + 2B + 2C = 25$

$2C = 8$

$C = 4$

$$\therefore \quad \frac{(2n+1)^2}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{8}{(n-1)!} + \frac{4}{(n-2)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}$$

$$= e - 1 + 8e + 4e$$

$$= \underline{13e - 1}$$

மாதிரி 3.

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)\,!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$$ எனக் காண்பி.

$$\frac{5n+1}{(2n+1)\,!} \equiv \frac{A}{(2n+1)\,!} + \frac{B}{(2n)\,!}$$ என்க.

$$\therefore \quad 5n+1 \equiv A+B\,(2n+1)$$

$n=0$, ஈடாக்கினுல், $1 = A + B$

$n = -\frac{1}{2}$, ஈடாக்கினுல், $-\frac{3}{2} = A$

$$\therefore \quad A = -\frac{3}{2}\,;\; B = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{5n+1}{(2n+1)\,!} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(2n)\,!}$$

$$\therefore \quad u_n = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(2n)\,!}$$

$$u_0 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{0\,!}$$

$$u_1 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\,!}$$

$$u_2 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4\,!}$$

... ...

... ...

$$u_n = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,!} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(2n)\,!}$$

... ...

... ...

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)\,!} = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\right]$$

$$+\frac{5}{2}\left[1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{4\,!}+\ldots\ldots\right]$$

$$(\because \quad 0\,! = 1)$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{e^1-e^{-1}}{2}\right]+\frac{5}{2}\left[\frac{e^1+e^{-1}}{2}\right]$$

$$= \frac{e}{2}+\frac{2}{e}$$

மாதிரி 4.

எண்ணிலிக்குத் தொடர் கூட்டல் :

$$2^2+\frac{3^2}{1\,!}\,.\,x+\frac{4^2}{2\,!}\,.\,x^2+\frac{5^2}{3\,!}\,.\,x^3+\ldots\ldots = e^x\,(x^2+5x+4)$$

என நிருபி.

$$\text{தொடர்} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n\,!}\,.\,x^n.$$

$$\frac{(n+2)^2}{n\,!} \equiv \frac{A}{n\,!}+\frac{B}{(n-1)\,!}+\frac{C}{(n-2)\,!} \text{ என்க.}$$

$$(n+2)^2 \equiv A+Bn+Cn\,(n-1)$$

$n = 0$, ஈடாக்கினுல், $4 = A$

$n = 1$, ஈடாக்கினுல், $9 = A+B$

$$\therefore \quad B = 5$$

$n = 2$, ஈடாக்கினுல், $16 = A+2B+2C$

$$C = 1$$

$$\therefore \quad A = 4;\ B = 5;\ C = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n\,!}\,.\,x^n = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)\,!}+1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)\,!}$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)\,!}+1\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)\,!}$$

$$= 4 \,.\, e^x + 5xe^x + x^2 \,.\, e^x$$

$$= e^x\,(x^2 + 5x + 4)$$

பயிற்சி 6

1. எண்ணிலி உறுப்புக்களுக்குத் தொடர் கூட்டல் காண்க :

$$\frac{1}{1\,!} + \frac{1+5}{2\,!} + \frac{1+5+5^2}{3\,!} + \frac{1+5+5^2+5^3}{4\,!} + \ldots\ldots$$

2. $\frac{1}{2\,!} + \frac{1+2}{3\,!} + \frac{1+2+2^2}{4\,!} + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\,(e-1)^2$ என நிருபி.

3. $1 + \frac{1+2}{2\,!} + \frac{1+2+3}{3\,!} + \frac{1+2+3+4}{4\,!} + \ldots\ldots$

4. $\frac{1^2}{1\,!} + \frac{1^2+2^2}{2\,!} + \frac{1^2+2^2+3^2}{3\,!} + \ldots + \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n\,!} + \ldots\ldots$

5. $\frac{2^2}{1\,!} + \frac{3^2}{2\,!} + \frac{4^2}{3\,!} + \ldots\ldots$

6. $\frac{1^3}{1\,!} + \frac{2^3}{2\,!} + \frac{3^3}{3\,!} + \ldots\ldots$

7. $\frac{1^4}{1\,!} + \frac{2^4}{2\,!} + \frac{3^4}{3\,!} + \ldots\ldots$

8. $\frac{1.2}{1\,!} + \frac{2.3}{2\,!} + \frac{3.4}{3\,!} + \ldots\ldots$

9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{n\,!}$

10. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)\,(n+2)}{n\,!} \,.\, 3^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} 2 \left\{ 1 + \frac{(\log_e n)^2}{2!} + \frac{(\log_e n)^4}{4!} + \ldots\ldots + \infty \right\}$

$= n + \frac{1}{n}$ என நிரூபி.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n + 1}{n!} = 5e - 1$ என நிரூபி.

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} . x^n = e^x (1+7x+6x^2+x^3)$ எனக் காண்க.

14. $\frac{1^2 . 2^2}{1!} + \frac{2^2 . 3^2}{2!} + \frac{3^2 . 4^2}{3!} + \ldots\ldots \infty = 27e$ எனக் காண்க.

15. $\frac{5}{1!} + \frac{7}{3!} + \frac{9}{5!} + \ldots\ldots = \frac{5e}{2} - \frac{3}{2e}$ எனக் காண்க.

16. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{(n-1)!} = 15e$ எனக் காண்க.

17. $\frac{3^2}{1!} + \frac{5^2}{3!} + \frac{7^2}{5!} + \ldots\ldots = 5e$

பின்வருவனவற்றின் தொடர்கூட்டல்களைக் காண்க.

18. $\frac{1^2}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \frac{3^2}{5!} + \ldots\ldots \infty$

19. $\frac{2 . 3}{3!} + \frac{3 . 5}{4!} + \frac{4 . 7}{5!} + \ldots\ldots \infty$

20. $\frac{1 . 2}{3!} + \frac{2 . 3}{4!} + \frac{3 . 4}{5!} + \ldots\ldots \infty$

21. $\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \ldots\ldots \infty$

22. $\frac{2 . 1^2+3}{2!} + \frac{2 . 2^2+4}{3!} + \frac{2 . 3^2+5}{4!} + \ldots\ldots \infty$

4. மடக்கைத் தொடர்

(Logarithmic Series)

4·1 தேற்றம்: $-1 < x < 1$ (அதாவது $|x| < 1$) ஆனால்,

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots\dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \dots\dots \infty$$

தெரிப்பு: $(1+x)^y = e^{y \log (1+x)}$ என்பதாகும். அடுக்குத் தேற்றத்தை உபயோகித்தால்,

$$= 1 + y \log (1+x) + \frac{y^2}{2!} \{ \log (1+x) \}^2$$

$$+ \frac{y^3}{3!} \{ \log (1+x) \}^3 + \dots\dots \quad (1)$$

ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தை உபயோகித்து இடப் பக்கத்தை விரித்தால்,

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!} x^3 + \dots\dots$$

$$[\text{இங்கு } |x| < 1] \quad (2)$$

இத்தொடர் அறநெருங்கல் தன்மையைப் பெற்றிருப்பதால், y ன் ஏறு வரிசையில் இத் தொடரைத் திருத்தி அமைக்க முடியும். அப்படி அமைத்தால், (1), (2) இரு தொடரிலும் y ன் சம குறியீட்டுகளின் கெழுக்கள் சமம்.

y ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தினால்

$$\log (1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \,.\, 2}{3!} \,.\, x^3 - \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3}{4!} x^4 \dots\dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

இதுதான் மடக்கைத் தேற்றத்தின் தெரிப்பாகும்.

குறிப்பு: தேற்றம் $x=1$ என்ற மதிப்புக்கு உண்மை.

$x=1$ ஈடாக்கினுல் $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots$

கவனிப்புக்குரியவை:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

$$\log_e(1+x) - \log_e(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots \infty$$

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$\therefore \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

மாதிரி 1.

$$\log\frac{n+1}{n-1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + \ldots\ldots$$

எனக் காண்பி.

வலப் பக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில்,

$$\frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{2n}{n^2+1}}{1 - \frac{2n}{n^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{n^2 + 1 + 2n}{n^2 - 2n + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \log \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \log \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$= \log \frac{n+1}{n-1}$$

மாதிரி 2.

$$\log 3 = \log 2 + 2 \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \ldots\ldots \right\}$$

என நிரூபி.

$$\text{வலப்பக்கம்} = \log 2 + \log \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \log 2 + \log \frac{6}{4}$$

$$= \log 2 + \log \frac{3}{2}$$

$$= \log 2 + \log 3 - \log 2$$

$$= \log 3$$

மாதிரி 3.

$$\log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (n+1)^2$$

$$- \frac{1}{3 \cdot 4 (n+1)^3} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2 \cdot 3 (n+1)^2} - \frac{1}{3 \cdot 4 (n+1)^3} - \ldots\ldots \propto$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$- \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)^3} - \ldots\ldots$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= n\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= n\left[-\log_e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= -n \log_e\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= n \log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= n \,.\, \log_e\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

மாதிரி 4.

தொடர் கூட்டல் காண்க:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots\infty$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots\right),$$

$$=3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\ldots\ldots\right);$$

$$=3\,\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)+\frac{9}{2}\cdot\left[-\log_e\left(1-\frac{1}{9}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}\log_e 2-\frac{9}{2}\log_e\frac{8}{9}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\log_e 2-3\log_e\frac{8}{9}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[\log_e 2-\log_e\left(\frac{8}{9}\right)^3\right]$$

$$=\frac{3}{2}\log_e\left(\frac{2\,.\,9^3}{8^3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\log_e\left(\frac{729}{256}\right)$$

மாதிரி 5.

$$\log_2 e-\log_4 e+\log_8 e-\log_{16} e\ldots\ldots\infty=1$$

$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ என்பது a, b எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(a>b>0)$ உண்மையாதலின்

$$\text{இடப்பக்கம்}=\frac{1}{\log_e 2}-\frac{1}{\log_e 4}+\frac{1}{\log_e 8}-\frac{1}{\log_e 16}\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{\log_e 2} - \frac{1}{2\log_e 2} + \frac{1}{3\log_e 2} - \frac{1}{4\log_e 2}$$

$$= \frac{1}{\log_e 2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{\log_e 2} \cdot \log_e 2 = 1$$

பயிற்சி 7 (a)

1. $\log \frac{a+x}{a-x} = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3 + \ldots$ எனக்காண்பி.

2. $\log \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots$ என நிருபி.

3. $\frac{a-b}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3 + \ldots = \log_e a - \log_e b$ எனக்காண்பி.

4. $-1 < x < \frac{1}{3}$ ஆனுல் $2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\right)$

$$= \frac{2x}{1-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^3 - \cdots\cdots$$

5. $\log(x+2h) = 2\log(x+h) - \log x$

$$- \left\{\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{h^4}{2(x+h)^4} + \frac{h^6}{3(x+h)^6} + \cdots\cdots\right\}$$ என நிருபி.

6. a, b, c அடுத்தடுத்த எண்களானுல்

$$\log_e b = \frac{1}{2}\log_e a + \frac{1}{2}\log_e c$$

$$+ \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \cdots\cdots$$ என நிருபி.

7. $x > 0$ ஆனுல்

$$\log x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \cdots\cdots$$ என நிருபி.

8. $\log \sqrt{12} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}$

$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots$ எனக்காண்பி.

9. $\log_e 10 = 3 \log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} \ldots\ldots$ எனக்காண்பி.

10. $\log_e 3 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \ldots\ldots$ என நிரூபி.

11. எண்ணிலிக்குத் தொடர் கூட்டல் காண்க.

$$\log_3 e - \log_9 e + \log_{27} e - \log_{81} e + \ldots\ldots$$

4·2. மடக்கைத் தொடரை உபயோகித்து, எண்ணிலித் தொடரின் கூடுதலைக் காணல் (Summation of Infinite series by using Logarithmic series).

மாதிரி 1.

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\ldots = 3 \log 2 - 1.$$

தொடரின் n^{th} உறுப்பை u_n எனவும், தொகையை S எனவும் கொள்வோம்.

$$u_n = \frac{2n+3}{(2n-1) \cdot 2n\,(2n+1)}$$

பகுதி பின்னங்களாக்குகையில்

$$u_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n} + \frac{C}{2n+1}$$

$$A = 2; \quad B = -3; \quad C = 1$$

$$\therefore \quad u_n = \frac{2}{2n-1} - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ ஈடாக்கினல்

$$u_1 = 2 \cdot \frac{1}{1} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$u_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{5}$$

... ...

... ...

$$S = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{5} + \ldots\ldots$$

$$= 2 + 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\right)$$

$$= 2 + 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots - 1\right)$$

$$= 2 + 3\,(\log 2 - 1)$$

$$= 3 \log 2 - 1$$

மாதிரி 2.

எண்ணிலிக்குத் தொடர் கூட்டல் காண்க.

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \ldots\ldots$$

தொடரின் n^{th} உறுப்பு u_n எனவும், S ஐத் தொடரின் தொகை எனவும் கொள்வோம்.

$$u_n = \frac{x^n}{n\,(n+1)}$$

$$= \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] x^n$$

$$u_1 = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] . x$$

$$u_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] x^2$$

$$u_3 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] x^3$$

... ...

... ...

$$S = \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \infty\right)$$

$$- \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \infty\right)$$

$$= -\log(1-x) - \frac{1}{x}\left[-\log(1-x) - \frac{x}{1}\right]$$

$$= -\log(1-x) + \frac{\log(1-x)}{x} + 1$$

$$= 1 + \log(1-x)\left[\frac{1}{x} - 1\right]$$

$$= 1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x)$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots\right)}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \dots}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{6} + x \text{ ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள்}\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

மாதிரி 4.

n அண்ணளவைப் பெறும் பொழுது, தோராயமாக

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2}\right)$$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x$ என்க.

$$\log x = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} - \cdots\right]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots\right)$$

$$x = e^{\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots\right)}$$

$$= e^1 \cdot e^{-\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \cdots\right)}$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{1\,!}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right) + \frac{1}{2\,!}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3}\right)^2 - \cdots\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{2n}(1) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) - \cdots\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right]$$

பயிற்சி 7 (b)

1. $\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + \cdots\cdots$

2. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots = \log 2$

3. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{5}{3.4.5} + \frac{9}{5.6.7} + \cdots = \frac{5}{2} - 3\log 2$

4. $\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots = \frac{3}{4} - \log 2$

5. தொடர் கூட்டல் காண்க:

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n(n+2)} x^n$

(iii) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^3}{n(n+3)} x^n$

(iv) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \cdot \dfrac{1}{2^n}$

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+n^2+1}{n(n+2)} \cdot x^n$

6. மதிப்பிடுக :

(i) $\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(ii) $\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\log(1+x^2)}$

(iii) $\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \log(1+x) - (1+2x)}{5x^3}$

(iv) $\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

7. n மிகப் பெரியதாகவிருந்தால், தோராயமாக

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{6}} = e^{1+\frac{1}{12n^2}}$$

8. x ன் ஏறு அடுக்குகளாக $\log \dfrac{1}{1-x-x^2+x^3}$ ன் விரிப்பை எழுதுக. (x^n ன் கெழு, n ஒற்றை இரட்டை எண்ணாகவிருந்தால், $\dfrac{1}{n}$ அல்லது $\dfrac{3}{n}$ என்ற மதிப்பைப் பெறும்).

9. $(1+x)^{1+x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^3}{2}$. ($x^4$ ஐயும், அதற்கு மீறிய x ன் அடுக்குகளையும் பொருட்படுத்த வேண்டியதில்லை).

5. அணிக்கோவை

(Determinant)

5·1. வரையறை: a_1, b_1, a_2, b_2 என்ற நான்கு எண்களைச் சதுர வடிவில் கீழ்க்கண்ட வகையில் குறிப்போம்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

எனக் குறிக்கலாம். இந்த அணியைத்தான், இரண்டாம் படித்தான அணிக்கோவை (Determinant of second order) எனக் கூறுகிரேம். a_1, b_1, a_2, b_2 இவைகளை மூலகங்கள் (Elements) எனச் சொல்கிரேம். படுக்கையில் அமையும் மூலகங்களுக்கு வரிசை மூலகங்கள் (Elements forming a row) என்றும், நெடுக்கையில் அமையும் மூலகங்களுக்குப் பத்தி (Elements forming a column) யில் உள்ளன என்றும் சொல்வோம். a_1 b_1 ஐ வரிசை என்றும், a_1 a_2 ஐ பத்தி என்றும் சொல்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையை எடுத்துக் கொண்டால், 9 மூலகங்கள் உள்ளன. 3 வரிசைகளும், 3 பத்திகளும் உள்ளன. a_1 b_2 c_3 ஐ அணிக்கோவையின் மூலைவிட்டம் (Leading diagonal of a determinant) எனச் சொல்கிரேம்.

5·2. அணிக்கோவையின் விரிப்பு (Expansion of a determinant).

ஒவ்வொரு அணிக்கோவையும், மூலகங்கள் வாயிலாக விரிப்புப் பெறும். அந்த விரிப்பு அணிக்கோவையின் மதிப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் விரிப்பு $a_1b_2 - a_2b_1$ ஆகும். இதுதான் அதன் மதிப்பாகும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்ற}$$

மூன்றும் படித்தான அணிக்கோவையின் விரிப்பைப்பார்ப்போம். முதல் வரிசையிலுள்ள மூலகங்கள் வாயிலாக எழுதினல்,

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

விரிப்பில், உறுப்புகள் குறி மாறி வருவதைக் காணவும். a_1 மூலகத்தை எடுத்து அதைப் பெருக்கும் அணியை எழுத, a_1 இருக்கும் வரிசையையும் பத்தியையும் விட்டுவிட்டு, மீதியை எழுதவேண்டும். அடுத்தபடி b_1 ஐ எடுக்கும் பொழுது குறி — ஆகும் என்பதை நன்கு கவனிக்கவும். இம்மாதிரியாகவே பத்தி மூலங்களையும் எடுக்கவேண்டும்.

ஆகவே,

(1) இந்த அணிக்கோவையின் விரிப்பு, முதல் வரிசையில் உள்ள மூலகங்கள் வாயிலாக அடையப்பெற்றுள்ளது. இதே மாதிரி, அணிக்கோவையின் விரிப்பு, பத்தி மூலகங்கள் வாயிலாகவும் அடையப் பெறலாம். எந்த ஒரு பத்தியையோ, அல்லது வரிசையையோ எடுத்துக்கொண்டு அவைகளின் மூலகங்கள் வாயிலாக விரிப்பைப் பெறலாம்.

(2) விரிப்புகளின் உறுப்புகள் மிகை (+), குறை (−) க் குறிகளை மாறிமாறிப் பெறும்.

(3) இந்த அணிக்கோவையின் விரிப்பு என்னவென்றால்

$a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$

$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$

இங்கு 1, 2, 3 என்ற தொங்கல் எண்கள் (Suffiexes) வரிசையில் உள்ளன. அப்படியிருந்தால் அந்த உறுப்பு (term)+ஆகும். இவ்வரிசைக்குக் கொண்டுவர ஏற்படும் மாற்றங்கள் ஒற்றைப் படை ஆனல், அந்த உறுப்பு –ve குறியையும், இரட்டைப் படை ஆனல் அந்த உறுப்பு +ve குறியையும் பெறும். உதாரணமாக $a_3b_1c_2$, இரண்டு மாற்றங்கள் செய்ய வேண்டும். இந்த உறுப்பு +ve ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்ற அணியை}$$

a_1ன் சிறுபகுதி (Minor) எனச் சொல்வோம். இந்த சிறிய பகுதியை அதற்குரிய குறியுடன் நாம் கருதினல் அதை இணைச்சினை (Cofactor) என்று சொல்வோம். ஆகவே

$$-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \; b_1 \text{ ன் இணைச்சினை ஆகும்.}$$

அவ்வாறே

$$+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; a_1 \text{ ன் இணைச்சினை ஆகும்.}$$

இங்கு, b_1ன் இணைச்சினை, b_1ன் சிறுபகுதியைக் குறியுடன் கொண்டதாகும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

மேலும் a_1ன் இணைச்சினையை A_1 என்று குறிப்போம். அதேமாதிரி, எந்த மூலகத்தின் இணைச்சினையும், அம் மூலகத்தைக் குறிக்கும் எழுத்துக்களின், பெரிய எழுத்துக்களால் (Capital letters) குறிக்கப்படும்,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்ற அணிக்கோவையின்}$$

விரிப்பு $= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_1b_2 - a_2b_1)$

$= a_1 . A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$ ஆகும்.

முதல் பத்தியின் மூலகங்களின் வாயிலாக எழுதும் பொழுது விரிப்பு

$$= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \text{ ஆகும்.}$$

5·3. அணிக்கோவையின் சில பண்புகள் (Some properties of determinants).

(1) எந்த ஒரு அணிக்கோவையிலும் வரிசைகளையும், பத்திகளையும் மாற்றி அமைத்தால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாருது,

ஆகவே,
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

இடப்பக்கம் அணிக்கோவையின் விரிப்பு

$$= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$$
$$= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$$

= வலப்பக்க அணிக்கோவையின் விரிப்பு ஆகும்.

(2) இரண்டு வரிசைகளையோ (பத்திகளையோ) ஒன்றுக்கொன்று மாற்றினல், அணிக்கோவையின் குறி மாறும்.

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & h & g \\ g & f & c \\ h & b & f \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

(3) இரண்டு வரிசைகளோ (அல்லது பத்திகளோ) ஒன்ருகவே இருந்தால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு சூன்ன மாகும்.

(4) ஒரு வரிசையிலோ (அல்லது பத்தியிலோ) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகங்களை, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணல் பெருக்கினல், முழு அணியின் மதிப்பும் குறிப்பிட்ட எண்ணல் பெருக்கப்பட்டதாகும். எடுத்துக்காட்டாக

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5) ஒரு வரிசையிலோ (அல்லது பத்தியிலோ) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகங்களும் 2 எண்களின் கூடுதலாக அமைந்தால், அந்த அணிக்கோவையை இரண்டு அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக நாம் எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

முதல் பத்தியின் மூலகங்களின் வாயிலாக விரித்தால்,

$$= (a_1+b_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+b_2)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+b_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$+ b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) ஒரு வரிசையில் (அல்லது பத்தியில்) உள்ள மூலகங்களுக்கு, மற்ற ஏதாமொரு வரிசையிலோ (அல்லது பத்தியிலோ) உள்ள மூலகங்களை ஏதாமொரு குறிப்பிட்ட எண்ணுல் பெருக்கிக் கூட்டினுல், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாருது. எடுத்துக்காட்டாக, இடப்பக்க அணிக்கோவையின் இரண்டாம் பத்தி மூலகங்களை p ஆலும், மூன்ரும் பத்தி மூலகங்களை q ஆலும் பெருக்கி, முதல் பத்தி மூலகங்களுடன் சேர்த்து, வலப்பக்க அணிக்கோவை உருவாக்கப் பெற்றுள்ளது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pb_1 & b_1 & c_1 \\ pb_2 & b_2 & c_2 \\ pb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qc_1 & b_1 & c_1 \\ qc_2 & b_2 & c_2 \\ qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[மற்ற இரண்டு அணிகளும், இரண்டு பத்திகள் ஒன்ருக அமைந்ததால் சுன்ன மதிப்பைப் பெறுகிறது.]

(7) ஒரு அணியில் மூலைவிட்டத்தில் ஒரு பக்கத்திலுள்ள மூலகங்கள் சுன்னமாஞல் அவ்வணியின் மதிப்பு மூலை விட்டத்தின் மூலகங்களின் பெருக்கற் பலன் ஆகும்.

மாதிரி 1.

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$= a \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & f \\ g & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} h & b \\ g & f \end{vmatrix}$$

$$= a\,(bc - f^2) - h\,(ch - gf) + g\,(hf - bg)$$

$$= abc - af^2 - ch^2 + gfh + ghf - bg^2$$

$$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

முதல் வரிசையை R_1 எனவும், இரண்டாம் வரிசையை R_2 எனவும், மூன்றும் வரிசையை R_3 எனவும் குறிப்போம்.

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\ (c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ (a-b)$$

5·3.1. முக்கியக் குறிப்பு: ஒரு அணிக்கோவையில் அதன் மூலகங்கள் x ன் விகிதமுறு இயற்கணித சார்பாக விருந்து, $x = a$ ன் பிரதியிடலால், இரண்டு வரிசைகளோ (அல்லது பத்திகளோ) சமமானால், $(x - a)$ அவ்வணியின் ஒரு சினை.

அணிக்கோவை $\triangle(x)$ ஆகவிருக்கட்டும். $x = a$, ஈடாக்கினால், இரண்டு வரிசைகள் சமமாகும். ஆகவே $\triangle(a) = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (x - a), \ \triangle \text{ வின் ஒரு சினை.}$$

$x = a$ ஈடாக்குகையில், r வரிசைகளோ (பத்திகளோ) சமமாவதால்

$$(x - a)^{r-1}, \ \triangle \text{ வின் ஒரு சினை ஆகும்.}$$

மாதிரி.

மதிப்பிடுக: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$a = b$, ஈடாக்கினால் $\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$

ஆகவே, $(a-b)$ ஒரு சினை. அதேமாதிரி $(b-c)$, $(c-a)$ சினைகள் ஆகும். அணிக் கோவையை $\triangle$ என்று கொண்டால், அது மூன்று படித்தான அணிக்கோவை.

$$\therefore \quad \triangle = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

$a=1$, $b=2$, $c=3$, இரு பக்கங்களிலும் ஈடாக்கினல்,

$$2 = k(-1)(-1)(2)$$

$$k = 1$$

$$\therefore \quad \triangle = (a-b)(b-c)(c-a)$$

5.4. அணிக்கோவையின் சிறு பகுதியும் இணைச்சினையும் (Minors and Cofactors of a determinant).

தேற்றம்: அணிக் கோவையின் ஒரு வரிசையிலோ (பத்தியிலோ) உள்ள மூலகங்கள், மற்ரொரு வரிசையின் (பத்தியின்) மூலகங்களின் இணைச்சினையால் பெருக்கப் பட்டால், அவைகளின் கூடுதல் சுன்னத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$ என நிரூபிக்கவேண்டும்.

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$$

$$= -a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{0}$$

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக.
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$C_1+C_2+C_3+C_4$ (பத்திகளைக் கூட்ட)

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+a_4) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$$(1+a_1+a_2+a_3+a_4) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-R_1 \\ R_3-R_2 \\ R_4-R_3 \end{matrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+a_4)$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

$a = 0$ மதிப்பை ஈடாக்குக.

$$\triangle = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$\triangle = 0$$

$\therefore$ a, $\triangle$ வின் ஒரு சினை. அதே மாதிரி b யும், c யும் சினைகள் ஆகும். மேலும், $-(b+c)=a$ ஈடாக்குக.

$$\triangle = \begin{vmatrix} (-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (-c)^2 \end{vmatrix}$$

மூன்று பத்திகளும் சமமாகின்றன. $(a+b+c)^2$, $\triangle$ வின் ஒரு சினை, $\triangle$.

ஆரும்படிக் கோவை

$$\triangle = k\,abc\,(a+b+c)^2\,(a+b+c)$$

$$= k\,abc\,(a+b+c)^3$$

இரு பக்கங்களிலும் $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ மதிப்பிட்டால்

$$27k = 54 \quad \therefore \quad k = 2$$

$$\therefore \quad \triangle = 2abc\,(a+b+c)^3$$

மாதிரி 3.

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix} = 2\,(a+b+c)^3$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & 2a+b+c & b \\ 2a+2b+2c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2 [a+2b+c-b]$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of determinants):

ஒரே படித்தான இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன், அதேபடித்தான மற்றொரு அணிக்கோவையாகும். மூன்றும்படித்தான இரண்டு அணிக்கோவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad D^1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

எனக்கொள்வோம்.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

இந்த அணிக்கோவையை விரித்தால் 27 அணிக்கோவைகள் பெறமுடியும். முதல் பத்தியிலுள்ள மூன்று பத்திகளை L_1, L_2, L_3 என்றும், இரண்டாம் பத்தியிலுள்ள மூன்று பத்திகளை M_1, M_2, M_3 எனவும், மூன்றும் பத்தியிலுள்ள பத்திகளை N_1, N_2, N_3 எனவும் குறிப்போம்.

$$\triangle = \Sigma\, [L_r\, M_s\, N_t], \; \{r, s, t;\ 1, 2, 3 \text{ மதிப்புகளைப் பெறும்}\}$$

r, s, t இவைகளின் இரண்டு சமமானல் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் காண்போம். உதாரணமாக,

$[L_1 M_2 N_2]$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\beta_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \triangle = [L_1M_2N_3] + [L_1M_3N_2] + [L_2M_1N_3] + [L_2M_3N_1] + [L_3M_1N_2] + [L_3M_2N_1]$$

$$[L_1M_2N_3] = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 \,.\, D$$

அதேமாதிரி

$$[L_1M_3N_2] = -\alpha_1\beta_3\gamma_2 \,.\, D$$
$$[L_2M_1N_3] = -\alpha_2\beta_1\gamma_3 \,.\, D$$
$$[L_2M_3N_1] = \alpha_2\beta_3\gamma_1 \,.\, D$$
$$[L_3M_1N_2] = \alpha_3\beta_1\gamma_2 \,.\, D$$
$$[L_3M_2N_1] = -\alpha_3\beta_2\gamma_1 \,.\, D$$

$$\therefore \quad \triangle = D\,\{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\}$$

$$= D \,.\, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= D \,.\, D^1$$

$\triangle$ என்ற அணிக்கோவை மூன்றும் படித்தான அணிக்கோவையாகும். ஆகவே இது அணிக்கோவையின் பெருக்கல் தேற்றமெனப்படும்.

5·5. அணிக்கோவையை உபயோகித்து நீக்கல் (Elimination using determinants).

$$a_1x+b_1y=0 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y=0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

இரண்டு சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(1) சமன்பாட்டை b_2 ஆலும்,

(2) சமன்பாட்டை b_1 ஆலும் பெருக்கினல்

$$a_1b_2x+b_1b_2y=0$$

$$a_2b_1x+b_1b_2y=0$$

கழிக்க, $x\,(a_1b_2-a_2b_1)=0$

$x\neq 0, \quad \therefore \quad a_1b_2-a_2b_1=0$ ஆகிறது.

அணிக்கோவையின்மூலம், இதனைத்தான்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \text{ என்று}$$

எழுத முடியும். இது சமன்பாட்டின் நீக்கற்பலன் (Eliminant) ஆகும். இப்போது எழுதும் முறை எளிதில் புலனுகிறது. சமன்பாடுகளின் வலப்பக்கத்தைச் சுன்னமாக ஆக்கிக் கொள்ள வேண்டும்.

$$x=\frac{a}{b-c};\ y=\frac{b}{c-a};\ z=\frac{c}{a-b}$$

ஆனல் $1+xy+yz+zx=0$

$$x=\frac{a}{b-c}.\ (\text{அ. து.})\ a-bx+cx=0$$

$$y=\frac{b}{c-a},\ (\text{அ. து.})\ ay+b-cy=0$$

$$z=\frac{c}{a-b},\ (\text{அ. து.})\ az-bz-c=0$$

a, b, c ஐ நீக்க, $\begin{vmatrix} 1-x & x \\ y & 1-y \\ z- & z-1 \end{vmatrix}=0$

$$1\,(-1-yz)+x\,(-y+yz)+x\,(-yz-z)=0$$
$$1+xy+yz+zx=0$$

5·5.1. அணிக்கோவை முறை உபயோகித்துச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறை :

மாதிரி.

தீர்க்கவும்: $a_1 x+b_1 y+c_1=R_1$

$$a_2 x+b_2 y+c_2=R_2$$
$$a_3 x+b_3 y+c_3=K_3$$

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} K_1 & b_1 & c_1 \\ K_2 & b_2 & c_2 \\ K_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & K_1 & c_1 \\ a_2 & K_2 & c_2 \\ a_3 & K_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & K_1 \\ a_2 & b_2 & K_2 \\ a_3 & b_3 & K_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

R_1, R_2, R_3 க்கு உரிய மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_1 x+b_1 y+c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x+b_3 y+c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

அணிக் கோவையைப் பிரித்தெழுதுகையில்

$$= \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 & c_1 \\ a_2 x & b_2 & c_2 \\ a_3 x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 y & b_1 & c_1 \\ b_2 y & b_2 & c_2 \\ b_3 y & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 z & b_1 & c_1 \\ c_2 z & b_2 & c_2 \\ c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 & c_1 \\ a_2 x & b_2 & c_2 \\ a_3 x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_1 = x \cdot \triangle$$

$$\therefore \quad x = \frac{\triangle_1}{\triangle}$$

அதே மாதிரி $y = \dfrac{\triangle_2}{\triangle}$

$$z = \frac{\triangle_3}{\triangle}.$$

பயிற்சி 8

நிருபிக்க :

1. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

2. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} (a+b+c)^3$$

3. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

4. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$$

5. தீர்க்கவும்

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 23 \\ 3x + y + 4z &= 26 \\ 6x + y + 7z &= 47 \end{aligned}$$

6. தீர்க்கவும்

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + z &= 7 \\ 3x + 2y + 9z &= 14 \end{aligned}$$

7. தீர்க்கவும்

$$\begin{aligned} x + y + z &= d \\ ax + by + cz &= d^2 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^3 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + cy + az &= 0 \\ cx + ay + bz &= 0 \end{aligned}$$

ஆனல் $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ என நிரூபி.

9. $$x = cy + bz$$
$$y = az + cx$$
$$z = bx + ay$$

ஆனல் $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ என நிறுபி $(x = y = z \neq 0)$.

6. சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குத் தோராயமான மதிப்புகள்

(Approximation to roots of an Equation).

6·1 மெய்க்கெழுக்களை உடைய x ன் பல்லுறுப்புக் கோவையாக $f(x)$ அமையட்டும். $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் x ன் மதிப்புகளை, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனச் சொல்கிறோம். தோராயமாக மூலங்களின் மதிப்பைக் காண்பதற்குரிய இரண்டு வழி வகைகளைக் குறிப்போம். (i) ஹார்னர் முறை (ii) நியூட்டன்முறை. அதற்கு வேண்டிய பல விதிகளைக் குறிப்போம்.

6·2 விதி 1 (Principle I):— $f(a)$ யும் $f(b)$ யும் எதிர்க் குறிகளைப் பெற்றிருந்தால் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாடு, a, b களுக்கிடையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு மூலத்தையாவது பெறும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$f(x) = x^3 - 8x - 40$$

$$f(4) = 64 - 32 - 40$$

$$= -8 = -$$

$$f(5) = 125 - 40 - 40$$

$$= 45 = +$$

$f(4)$ ம், $f(5)$ ம் எதிர்க் குறிகளைப் பெற்றிருப்பதால், சமன்பாட்டின் குறைந்தபட்சம் ஒரு மூலமாவது 4 க்கும் 5 க்கும் இடையில் இருக்கும்.

6·3 விதி 2 (Principle 2): கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களை, குறிப்பிட்ட ஒரு மாறிலி அளவு குறைத்த பிறகு, அவைகளை மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைக் காணும் முறை.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x + 11 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை, 2 குறைத்து வரும் மூலங்களுக்குரிய சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

புதுச் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் $f(x)$ ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கப்பட்டு வரும் மீதிகள் ஆவன. $f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு.

தொகுப்பு முறை வகுத்தலைக் கையாள (By Synthetic Division)

2	1	−5	7	−17	11
	0	2	−6	2	−30
	1	−3	1	−15	−19
	0	2	−2	−2	
	1	−1	−1	−17	
	0	2	2		
	1	1	1		
	0	2			
	1	3			

புதுச் சமன்பாடு $x^4 + 3x^3 + x^2 - 17x - 19 = 0$. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களை விட 2 குறைவு.

விதி 3 (Principle 3): α, β, γ ...... மூலங்களை உடைய சமன்பாடு $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots\dots + p_n = 0$ ஆயின்,

$10\alpha, 10\beta, 10\gamma \ldots\ldots$ இவைகளை மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு $x^n + 10\, p_1 x^{n-1} + 10^2\, p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + 10^n\, p_n = 0$ ஆகும்.

இம்மூன்று விதிகளை உபயோகித்து ஒரு சமன்பாட்டின் மூலத்தின் தோராயமான மதிப்பை ஹார்னர் முறையில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

6·5 ஹார்னர் முறை :

மாதிரி.

$x^3 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தை (positive root) இரண்டு தசம இடச் சுத்தத்திற்குக் கண்டுபிடி.

முதற்படி (First stage)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$
$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -$$
$$f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 = +.$$

1 க்கும் 2 க்கும் இடையே ஒரு மிகை மூலம் உள்ளது என்பதைக் காண்கிறோம்.

இரண்டாம் படி (Second stage)

இச்சமன்பாட்டின் மூலத்தை 1 ல் குறைக்கவும்.

1	1	0	−3	1	∵ x^2 ன் கெழு = 0.
	0	1	1	−2	
	1	1	−2	−1	
	0	1	2		
	1	2	0		
	0	1			
	1	3			

புதுச்சமன்பாடு $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. இச் சமன்பாட்டின் மூலம் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் உள்ளது.

மூன்றாம்படி (Third stage) :

இந்தப் புது சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்க, சமன்பாடு

$$x^3+30x^2-1000=0 \text{ ஆகிறது.}$$

இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு 5 க்கும் 6 க்கும் இடையில் மூலமுள்ளது என்பதை முன் சொன்னமுறையில் (முதற்படியில் குறிப்பிட்ட முறையில்) காணலாம். இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 5 ல் குறைக்க.

5	1	30	0	−1000
	0	5	175	875
	1	35	175	−125
	0	5	200	
	1	40	375	
	0	5		
	1	45		

இந்த $x^3+45x^2+375x-125=0$ சமன்பாடு, ஒரு மூலத்தை 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் பெறும். இதன் மூலங்களைப் 10 ஆல் பெருக்க $x^3+450x^2+37500x-125000=0$. இதன் மிகை மூலம் 3 க்கும் 4 க்கும் இடையில் உள்ளது எனக் காணலாம்.

நாலாம்படி (Fourth stage) :

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 3 ல் குறைக்க

3	1	450	37500	−125000
	0	3	1359	116577
	1	453	38859	−8423
	0	3	1368	
	1	456	40227	
	0	3		
	1	459		

புதுச்சமன்பாடு,

$x^3+459x^2+40227x-8423=0$. இதன் ஒரு மிகை மூலம் 2 க்கும் 3 க்குமிடையே உள்ளது. இதன் மூலங்களை 2 ல் குறைக்க,

ஐந்தாம்படி (Fifth stage) :

சமன்பாடு $x^3+4590x^2+4022700x-8423000=0$

2	1	4590	4022700	−8423000
	0	2	9114	8063768
	1	4592	4031884	−359232
	0	2	9118	
	1	4594	4041072	
	0	2		
	1	4596		

புதுச் சமன்பாடு

$$x^3 + 4596\,x^2 + 4041072\,x - 359232 = 0$$

மூலம் இரண்டு தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாக வேண்டுமாகையால், மூலம் 1·532 ஆகிறது. இரண்டு தசம இடச் சுத்தமாக, மூலம் = 1·53.

6·6 நியூட்டன் முறை:

$f\,(a+h)$ ஐ h ன் அடுக்குகளாக எழுதமுடியும்.

$$f\,(a+h) = f\,(a) + \frac{h}{1\,!}\,f'\,(a) + \frac{h^2}{2\,!}\cdot f''\,(a) + \ldots\ldots$$

$f\,(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $(a + h)$] ஆக இருக்கட்டும்.

$$f\,(a + h) = 0$$

$$\therefore\quad f\,(a) + h\,f'\,(a) = 0$$

$$h = -\frac{f'\,(a)}{f\,(a)}\quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி.

$x^3 - 2x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தை 2 தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாகக் கண்டுபிடிக்கவும்,

$$f\,(x) = x^3 - 2x - 5$$

$$f\,(2) = -1$$

$$f\,(3) = 16$$

2 க்கும் 3 க்கு மிடையே ஒரு மூலம் அமைகிறது. மூலம் $= 2 + h$ ஆக விருக்கட்டும்.

$$h = -\frac{f\,(2)}{f'\,(2)} = -\frac{-1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$= .10$$

சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் = 2·10

பயிற்சி 9

1. 1 க்கும் 2 க்கும் இடையேயுள்ள $x^3 + 2x - 5 = 0$ ன் சமன்பாட்டின் மூலத்தை 2 தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

2. $x^3 - 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் 1 க்கும் 2 க்கும் இடையேயுள்ள மூலத்தை 3 தசம இடச் சுத்தமாகக் காண்க.

3. $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் 1 க்கும் 2 க்கு மிடையேயுள்ள மூலத்தை 2 தசம இடச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

4. நியூட்டன் முறையில் $x^3 - 3x - 4 = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் ஒரு மிகை மூலத்தை 2 தசம இடச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

5. நியூட்டன் முறையில் $x^3 - 5x - 11 = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் ஒரு மிகை மூலத்தை 2 தசம இடத்திற்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

7. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்
(Solutions of Equations)

7·1 இந்தப் பகுதியில் x, y, z களை ஈடுபடுத்திய ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளை (Simultaneous Equations in three unknowns) ஆராய்வோம்:

மாதிரி 1.

தீர்க்கவும்:
$$x^2+y^2+z^2 = 14 \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$
$$xy+yz+zx = 11 \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$
$$x+y+2z = 9 \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

(ii) ஐ 2 ஆல் பெருக்கி (i) உடன் கூட்டுக.
$$x^2+y^2+z^2+2\,(xy+yz+zx) = 36$$
$$(x+y+z)^2 = 36$$
$$x+y+z = +6 \text{ அல்லது } -6.$$

(iii)
$$x+y+z = 9$$
$$z = 3$$
$$\therefore \quad x+y = 3$$
$$x^2+y^2 = 5$$

இவ்விரண்டையும் தீர்க்க
$$x = 1 \text{ அல்லது } 2$$
$$y = 2 \text{ அல்லது } 1$$

ஆகவே $x = 1$ அல்லது $x = 2$

$y = 2 \qquad y = 1$

$z = 3 \qquad z = 3$

அதேமாதிரி, $x + y + z = -6$ எடுத்துக் கொண்டால், $z = 15$ வரும். ஆனல் x, y மதிப்புகள் கற்பனை எண்களாகின்றன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

மாதிரி 2.

$$xy+x+y = 23 \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$xz+x+z = 41 \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

$$yz+y+z = 27 \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

(i), (iii), (iii) மாற்று முறையில் எழுத

$$(x+1)(y+1) = 24 \ldots\ldots \quad \text{(iv)}$$

$$(x+1)(z+1) = 42 \ldots\ldots \quad \text{(v)}$$

$$(y+1)(z+1) = 28 \ldots\ldots \quad \text{(vi)}$$

(iv), (v), (vi) மூன்றையும் பெருக்க

$$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 28224$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 168$$

$$\therefore\ x+1 = 6 \qquad \therefore\ x = 5$$

$$y+1 = 4 \qquad \therefore\ y = 3$$

$$z+1 = 7 \qquad \therefore\ z = 6$$

$(x+1)(y+1)(z+1) = -168$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$x = -7$$

$$y = -5$$

$$z = -8$$

பயிற்சி 10

தீர்க்கவும் :

1. $$yz = 4z - 3y$$

$$zx = 2z - 3x$$

$$2xy = 2x + y$$

2.
$$xy = a^2$$
$$yz = b^2$$
$$zx = c^2$$

3.
$$(x+3)(y+5) = 24$$
$$(y+5)(z+7) = 48$$
$$(z+7)(x+3) = 32$$

4.
$$xy+3(x+y) = 1$$
$$yz+3(y+z) = 21$$
$$zx+3(z+x) = 15$$

5.
$$xy = x+y+5$$
$$yz = y+z+11$$
$$zx = z+x+7$$

6.
$$(y+z)(x+y+z) = 1$$
$$(z+x)(x+y+z) = 3$$
$$(x+y)(x+y+z) = 4$$

7. $x = cy+bz, \quad y = az+cx, \quad z = bx+ay,$

$(x, y, z \neq 0)$ ஆனால்

$$a^2+b^2+c^2+2abc = 1$$

8.
$$xy+3y+5x = 9$$
$$yz+5z+7y = 13$$
$$zx+7x+3z = 11$$

8. நிகழ்தகவு

(Probability)

8·1 ஒரு கன சதுரத்திற்கு 6 பக்கங்கள் உள்ளன. இந்த 6 பக்கங்களையும், 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களால் குறிக்கலாம். இந்த கன சதுரத்தை உருட்டி விட்டால், குறிப்பிட்ட எண் மேல் சதுரத்தில், 6 முறை உருட்டி விட்டால் ஒருமுறை வரலாம். மொத்த எண்கள் 6. ஒரு குறிப்பிட்ட எண் நிகழ (மேல் சதுரத்தில் வர) விரும்புகிறோம். ஆகவே நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6}$

ஒரு முறை நிகழும். 5 முறை நிகழாது.

∴ ஒரு குறிப்பிட்ட எண் வரும் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{1+5}$

குறிப்பிட்ட எண் வராததின் நிகழ்தகவு $= \frac{5}{1+5}$

ஆகவே, ஒரு நிகழ்ச்சி m வெவ்வேறு தடவைகளில் நிகழ்ந்தும், n வெவ்வேறு தடவைகளில் நிகழாமலுமிருந்து,

அந்த நிகழ்ச்சி ஏற்படும் நிகழ்தகவு $= \frac{m}{m+n}$

அந்த நிகழ்ச்சி ஏற்படாததின் நிகழ்தகவு $= \frac{n}{m+n}$

8·1.2 குறிப்பு: குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படும் நிகழ்தகவு + நிகழ்ச்சி ஏற்படாததன் நிகழ்தகவு $= \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n}$

$$= \frac{m+n}{m+n} = 1$$

எனக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 1.

6 பச்சை, 4 வெள்ளை, 5 சிகப்புப் பந்துகளில், ஒரு பச்சைப் பந்தைப் பொருக்கினால் நிகழ்தகவு என்ன ?

6 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பச்சைப் பந்தை 6 முறைகளில் பொருக்கலாம்.

ஒரு பச்சைப் பந்தைப் பொருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{6}{6+4+5}$

$$= \frac{6}{15}$$

$$= \frac{2}{5}$$

மாதிரி 2.

இரண்டு பகடைகள் (dice) எறியப்பட்டன. அவைகளால் குறிக்கப்பட்ட எண்களின் கூடுதல் 7 வருகிற மாதிரி இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

பகடை ஒரு கன சதுரம், அதற்கு 6 பக்கங்கள் உள்ளன. அவற்றில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 எண்கள் குறிக்கப்படும். இரண்டு பகடைகள் எறியப்பட்டன. 7 வரவேண்டுமானால் 1, 6 ; 2, 5 ; 3, 4 ; 4, 3 ; 5, 2 ; 6, 1 இந்த முறையில் எண்கள் அமைய வேண்டும். இந்த நிகழ்ச்சி 6 முறைகளில் ஏற்படலாம்.

ஆனால் இரு பகடைகளை எறியும் வகையில் ஏற்படும் பல வகைகள் } 6×6

$$= 36$$

நிகழ்தகவு $= \frac{6}{36}$

$$= \frac{1}{6}$$

பயிற்சி 11

1. ஒரு பையில் 6 சிகப்பு, 4 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரு சிகப்புப் பந்தைப் பொருக்குவதில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு என்ன ?

2. இரண்டு பகடைகள் எறியப்படுகின்றன. அவைகள் மேல்காணும் எண்களின் கூடுதல் 6 ஆக விருக்கையில், ஏற்படும் நிகழ்தகவு என்ன ?

3. ஒரு சீட்டுக் கட்டில் ஒரு அரசன் படத்தைப் பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு என்ன ?

8·2. கூட்டுத் தேற்றம் (Addition Theorem):

வரையறை : இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றை ஒன்று விலக்குத்தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive) என்ருல், ஒரு சமயத்தில் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படும்பொழுது அதேசமயத்தில் மற்ருெரு நிகழ்ச்சி ஏற்பட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பையில் சில பச்சைப் பந்துகளும், சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால், அது பச்சைப் பந்தாகவோ அல்லது சிவப்புப் பந்தாகவோதான் இருக்க முடியும். பொருக்கியது பச்சைப் பந்தாக விருந்தால், சிவப்புப் பந்தாக இருக்க முடியாது. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் 'ஒன்றை ஒன்று விலக்குத் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள்' எனச்சொல்வோம்.

கூட்டு விதி : p என்பது ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ருல் q என்பது, ஒன்றை ஒன்று விலக்குத் தன்மையைப் பெற்ற மற்ருெரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ஆனுல், இவ்விரண்டில் ஒன்று ஏற்படுமானுல், அவ்விரண்டில் ஒன்றுக்குக் கிடைக்கும் நிகழ்தகவு $= p + q$.

தேற்றம் : ஒன்றை ஒன்று விலக்குத் தன்மையைப்பெற்ற பல நிகழ்ச்சிகளில், ஒன்ருே அல்லது மற்ருென்ருே ஏற்படக் கூடிய நிகழ்தகவு, அவைகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலுக்குச்சமம்.

தெரிப்பு : ஒன்றை ஒன்று விலக்குத் தன்மையையும் சமவாய்ப்புகளையும் பெற்ற நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை N ஆக விருக்கட்டும். $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ என்ற நிகழ்ச்சிகள், $m_1; m_2 \ldots\ldots m_n$ என்ற சாதகமான வாய்ப்புகளைப் பெறட்டும்.

A_1 ன் நிகழ்வுத்தகவு $= \frac{m_1}{N}$. அதேமாதிரி $A_2 \ldots A_n$ ன் நிகழ்

தகவுகள், நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றை ஒன்று விலக்குந் தன்மையைப்பெற்று சமவாய்ப்புகளை உடையதாகவுமிருப்பதால், ஒன்ருே அல்லது மற்ெருன்ருே ஏற்படக் கூடியதன்

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \ldots + \frac{m_n}{N}$$

$$= \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{N}$$

= **நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்.**

மாதிரி.

ஒரு பையில் 5 பச்சை, 6 சிகப்பு, 13 வெள்ளைப்பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பச்சையோ அல்லது வெள்ளைப் பந்தோ பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு என்ன ?

பச்சைப்பந்து பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு $= \dfrac{5}{5+6+13}$

$$= \frac{5}{24}$$

வெள்ளைப்பந்து பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு $= \dfrac{13}{5+6+13}$

$$= \frac{13}{24}$$

ஒரு பச்சை அல்லது வெள்ளைப் பந்து பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு $= \dfrac{5}{24} + \dfrac{13}{24}$

$$= \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

8·3. பெருக்கல் தேற்றம் (Multiplication Theorem) :— ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படும் பொழுது மற்ெருரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கு விலக்கில்லாமல் இருந்தால், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளையும் தனித் தன்மை (independent) பெற்றவை எனச் சொல்வோம். *தனித் தன்மை பெற்ற இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் p, q முறையே ஆயின், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே சமயத்தில் ஏற்படுவதாயின், நிகழ்தகவு $= pq$.*

பெருக்கல் தேற்றம் : தனித்தன்மை பெற்ற இரு நிகழ்ச்சி களின் நிகழ்தகவுகள் முறையே p_1, p_2 ஆகில், ஒரே வாய்ப்பில் இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஏற்படுவதின் நிகழ்தகவு $p_1 \cdot p_2$ ஆகும்.

தெரிப்பு: சம வாய்ப்புப் பெற்ற நிகழ்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை N ஆகவிருக்கட்டும். முதல் நிகழ்ச்சி ஏற்படுவ தின் நிகழ்தகவு p_1 ஆகவிருக்கட்டும். முதல் நிகழ்ச்சி ஏற்படும் நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை p_1N ஆகும். இந்த p_1N நிகழ்வுகளில், இரண்டாம் நிகழ்ச்சி ஏற்படும் நிகழ்வுகள் $p_2 (p_1 N)$. ஏனென்றால் இரண்டாம் நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதன் நிகழ்தகவு p_2 ஆகவிருக்கிறது.

ஆகையால், இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஏற்படுவதன் நிகழ்தகவு $= \frac{p_1 p_2 N}{N}$

$$= p_1 \times p_2$$

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தை 'n' தனித்தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பொறுத்தலாம்.

கூட்டு நிகழ்தகவுத் தேற்றம் (Theorem on compound probability) :

A, B இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதின் நிகழ்தகவு, A யின் நிகழ்தகவு பெருக்கல் A நிகழும்பொழுது B யின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு (additional probability) [அல்லது B யின் நிகழ்தகவு × B நிகழும் பொழுது A யின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு] என்பதாகும்.

தெரிப்பு : சமவாய்ப்புப் பெற்ற, ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் தன்மையையும் பெற்ற நிகழ்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை N ஆகவிருக்கட்டும். இந்நிகழ்வுகளில் A க்குச் சாதகமாக 'm' நிகழ்வுகள் இருக்கட்டும். A க்கும் B க்கும் சாதகமாக விருக்கக் கூடிய நிகழ்வுகள், இந்த 'm' நிகழ்வுகளில் கலந் துள்ளன. அவைகளின் எண்ணிக்கை m_1 ஆகவிருக்கட்டும் A யும் B யும் ஒரே சமயத்தில் ஏற்படுவதன் நிகழ்தகவு

$$= \frac{m_1}{N} = \frac{m}{N} \cdot \frac{m_1}{m}$$

$\frac{m}{N}$ என்ற விகிதம், A யின் நிகழ்தகவு. A நிகழ்ந்ததாக

எடுத்துக்கொண்டு, m நிகழ்வுகளில், m_1, B க்குச் சாதகமாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, $\frac{m_1}{m}$, B யின் நிபந்தனைக் குட்பட்ட நிகழ்தகவாகும்.

∴ ஒரே சமயத்தில் A யும் B யும் ஏற்படுவதன் நிகழ்தகவு
= A யின் நிகழ்தகவு × A நிகழும் பொழுது Bயின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவாகும்.

மாதிரி 1

A, B என்ற இரண்டு பைகள் உள்ளன. A யில் 5 பச்சைப் பந்துகளும், 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. B யில் 4 பச்சைப் பந்துகளும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாமொரு பையை எடுத்து, ஒரு பந்தைப் பொருக்குவோம். அது வெள்ளைப் பந்தாக அமைந்தால் நிகழ்தகவு என்ன?

இரண்டு பைகளில் ஒரு பையைப் பொருக்குகிறோம். நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

A பையை எடுத்துக்கொண்டால், வெள்ளைப் பந்தைப் பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $= \frac{2}{7}$. இவ்விரண்டும் தனித் தன்மையைப்பெற்ற நிகழ்ச்சிகளாதலால், வெள்ளைப் பந்தைப் பையிலிருந்து பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$.

அதேமாதிரி B பையிலிருந்து பொருக்குகையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

இருபைகளிலிருந்தும் பொருக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றை ஒன்றும் விலக்கும் தன்மையைப் பெற்றவை.

மொத்த நிகழ்தகவு $= \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14}$

மாதிரி 2.

இரண்டு பைகள் உள்ளன. ஒன்றில் 4 சிவப்பு, 6 பச்சைப் பந்துகளும், மற்றொன்றில் 5 சிவப்பு, 4 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாமொரு பையிலிருந்து ஒரு பந்தைப் பொருக்குகிறோம். அப்பந்து பச்சைப் பந்தாகில், நிகழ்தகவு என்ன ?

முதற் பையைப் பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

அப்பையில் பச்சைப் பந்து பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{6}{10}$

நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$

இரண்டாம் பையைப் பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{1}{2}$

அங்கு பச்சைப் பந்து பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{4}{9}$

நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

ஏதாமொரு பையிலிருந்து பொருக்குகையில் நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{3}{10} + \frac{2}{9}$

$$= \frac{47}{90}$$

8·4 கூட்டு நிகழ்ச்சித் தேற்றம் (Compound Events Theorem) :

p என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதின் நிகழ்தகவு என்றும், q அந்நிகழ்ச்சி நடக்காதிருப்பதின் நிகழ்தகவு என்றும் கொண்டால், அந்நிகழ்ச்சி, n முயற்சிகளில் r தடவைகள் நடப்பதாகவிருந்தால், நிகழ்தகவு $nC_r \cdot p^r . q^{n-r}$ ஆகும்.

மாதிரி 1.

4 காசுகளைச் சுண்டிவிட்டால், 2 தலைப்பக்கங்களும், 2 பூப் பக்கங்களும் வரக்கூடிய வாய்ப்பு என்ன ?

ஒரு காசுக்கு 2 பக்கங்கள் உண்டு. ஒரு சுண்டிவிடலில் தலைப் பக்கம் பெறுவதின் நிகழ்தகவு = $\frac{1}{2}$; பூப்பக்கம் பெறுவதின் நிகழ்தகவு = $\frac{1}{2}$. எங்களுக்கு 2 தலைப்பக்கங்களும், 2 பூப் பக்கங்களும் தேவை. நிகழ்தகவு = $(\frac{1}{2})^2 . (\frac{1}{2})^2$. ஆனால் 2 காசுகளில் தலைப்பக்கங்களைப் பெறலாம். 2 காசுகளை $4C_2$ வழிகளில் பொருக்கலாம். ஒவ்வொரு வழியும், ஒன்றுக்கொன்று விலக்கப்பட்ட தன்மையைப் பெற்றிருப்பதால்

$$\text{நிகழ்தகவு} = 4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

மாதிரி 2.

மூன்று பகடைகளை எறிவதில் 15 பெறக்கூடிய வாய்ப்புக்கள் என்ன என்று கண்டு பிடிக்கவும்.

ஒவ்வொரு பகடையும் 6 பக்கங்களை உடையன. ஆகவே அவைகள் $6 \times 6 \times 6$ முறைகளில் எறியப்படும்.

பகடைகளின் பக்கங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 குறிக்கப்பட்டிருக்கும். மூன்று பக்கங்களில் காணும் எண்களின் கூடுதல் 15 ஆக வேண்டும் (ஒரே எண் இரண்டு தடவைகளும், 3 தடவையிலும் வரலாம்). இந்த விடை $(x^1+x^2+\ldots\ldots+x^6)^3$ ல் x^{15} ன் கெழுக்குச் சமமாகும்.

$$= x^3 \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 \text{ ல் } x^{15} \text{ ன் கெழு}$$

$$= x^3 (1-x^6)^3 (1-x)^{-3} \text{ ல் } x^{15} \text{ ன் கெழு}$$

$$= x^3 (1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})$$

$$\left(1 + \frac{3}{1\,!} \,.\, x + \frac{3 \,.\, 4}{2\,!} \,.\, x^2 + \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5}{3\,!} \,.\, x^3 + \ldots\ldots\right)$$

$$\therefore \quad \text{நிகழ் தகவு} = \frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

பயிற்சி 12

1. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு, 6 வெள்ளை, 7 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்தை வெளியில் எடுக்கிறோம். அப்பந்து பச்சையோ அல்லது வெள்ளையோ ஆக விருக்க, நிகழ் தகவு என்ன ?

2. இரண்டு பகடைகளை எறிவதில் 3 அல்லது 4 கிடைப்பதற்கு நிகழ் தகவு என்ன ?

3. ஒரு பகடை இரண்டு முறை எறியப்பட்டது. முதல் தடவை எறிவதில் 4 க்கு அதிகமில்லாமலும் இரண்டாம் தடவை எறிவதில் 5 க்கு அதிகமில்லாமலும் இருந்தால் நிகழ் தகவு என்ன ?

4. 5 காசுகள் சுண்டிவிடப்படுகின்றன. 3 தலைகள் பெறுவதற்கு நிகழ் தகவு என்ன ?

5. 5 காசுகள் சுண்டி விடப்படுகின்றன. (i) 5 தலைகள் பெற்றால், (ii) தலைகளே பெறாமல் இருந்தால். (iii) குறைந்த பட்சம் 3 தலைகள் பெற்றால் நிகழ் தகவு என்ன ?

6. இரண்டு பகடைகளை எறிவதில் 10 கிடைக்கக் கூடிய வாய்ப்புகள் எவ்வளவு ?

7. ஆண் மகவின் பிறப்பின் நிகழ் தகவு $\frac{1}{2}$ ஆனால், ஒரு பெண்ணுக்கு மூன்று குழந்தைகள் பிறந்ததில் (i) எல்லாரும் ஆண்மக்களாக விருந்தால், (ii) இரண்டு ஆண்மக்களும், ஒரு பெண்மகவுமாக இருந்தால் நிகழ் தகவு என்ன ?

8. ஒரு கூட்டத்தில் 20 பேர்கள் உள்ளனர். அவர்களுள் 5 பேர் பட்டதாரிகள். இந்த 20 பேர்களுள், 3 பேர்களைத் தேர்ந்தெடுத்தால்,

(i) ஒருவராவது பட்டதாரியாக இருந்தால் நிகழ் தகவு என்ன ?

(ii) எல்லாருமே பட்டதாரிகளாக இருந்தால் நிகழ் தகவு என்ன ?

9. குலுக்கப்பட்ட சீட்டுக்கட்டில் முதல் நாலு சீட்டுகளும் அரசன் படத்தை உடையதாக விருந்தால் நிகழ் தகவு என்ன ?

10. 3 பகடைகளை ஒரு முறை எறிந்து எண்களின் கூட்டுத் தொகை 10 ஆனால், நிகழ் தகவு என்ன ?

11. ஒரு பையில் 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 நீலப் பந்துகளும் உள்ளன. 2 பந்துகளை 2 தடவைகளில் எடுக்கிறார்கள். முதல் தடவை எடுக்கும் பொழுது இரண்டு பந்துகளும் சிவப்பாகவும், இரண்டாம் தடவை எடுக்கும் பொழுது இரண்டு பந்துகளும் நீலமாகவும் கீழ்க்கண்ட சந்தர்ப்பங்களில் இருப்பதற்கு வாய்ப்புகள் (chance) என்ன ?

(*a*) முதல் எடுப்பிற்குப் பிறகு பந்துகளைப் பையில் திருப்பிப் போட்டுவிடுகிறார்கள்.

(*b*) முதல் தடவை எடுத்த பந்துகளைத் திருப்பிப் பையில் போடுவதில்லை.

12. ஒரு பையில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 2 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாமொரு பையை எடுத்து, அதிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தைப் பொருக்கும் வாய்ப்புகள் என்ன ?

13. ஒரு பையில் 10 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. மற்றொன்றில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 5 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. முதல் பையிலிருந்து இரண்டு பந்துகளை மற்றொரு பைக்கு மாற்றி விடுகிறார்கள். பிறகு இரண்டாம் பையிலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுத்து விடுகிறார்கள். அப்பந்து வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கு வாய்ப்புகள் என்ன ?

14. 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள 4 பகடைகள் எறியப்படுகின்றன. ஒரே வீச்சில் பகடைகளின் மேலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 12 ஆவதானால் நிகழ்வுத் தகவு என்ன ?

விடைகள்

பயிற்சி 1

1. $\dfrac{3}{2(x-1)} - \dfrac{7}{x-2} + \dfrac{13}{2(x-3)}$

2. $\dfrac{1}{2(x-2)} + \dfrac{1}{2(x+2)} - \dfrac{1}{x+1}$

3. $\dfrac{13}{x-2} - \dfrac{10}{x-1}$

4. $\dfrac{1}{1+3x} + \dfrac{1}{1+2x}$

5. $\dfrac{1}{1-3x} + \dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{1}{1+x}$

6. $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)^2}$

7. $\dfrac{1}{8(1+x)} + \dfrac{1}{8(1-x)} + \dfrac{1}{4(1+x)^2} + \dfrac{1}{2(1+x)^3}$

8. $\dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{8x} - \dfrac{1}{8(x+2)}$

9. $-\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$

10. $\dfrac{1}{13}\left[\dfrac{6}{3-2x} + \dfrac{3x-2}{1+x^2}\right]$

11. $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

12. $1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

13. $-\dfrac{15}{16}+\dfrac{41}{16}\cdot\dfrac{1}{4x-1}+\dfrac{135}{16\,(4x-1)^2}+\dfrac{25}{16\,(4x-1)^3}$

14. $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{7}{(x-1)^3}+\dfrac{5}{(x-1)^4}$

பயிற்சி 2

1. (i) $(-1)^n\,.\,\dfrac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{n!\,.\,2^n}\,.\,x^n$

(ii) $\dfrac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2n-1)}{n!}\,.\,(2x)^n$

(iii) $(-1)^{2n}\,.\,\dfrac{-3\,.\,1\,.\,5\,.\,9\ldots(4n-7)}{n!}\left(\dfrac{x}{6}\right)^n$

(iv) $\dfrac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{n!}\,.\,x^n$

2. $\dfrac{(n+1)\,.\,(2n^2+3n+2)}{2}$

4. $a = \quad = \dfrac{4}{3}$; $\left(\dfrac{n+1}{5}\right)\left[4+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\right]$

6. 3^n. 8. $1+\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[2^{n+1}+(-1)^n\,3^{n+1}\right]$

9. $1-2n+\dfrac{3}{2^{n+1}}$

10. $\dfrac{1}{25\,(x-1)}+\dfrac{2}{5\,(x-1)^2}-\dfrac{2}{25\,(2x+3)}$;

$$\frac{2\,(n+1)}{5}-\frac{1}{25}-\frac{2}{75}\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

பயிற்சி 3

1. $2\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $\sqrt[3]{4}$ 4. $\frac{1}{2}$ 6. $\sqrt{8/27}$ $\sqrt{8}-1$

8. $2^{2/3}-1$ 9. $\sqrt{3}-\frac{2}{3}$ 10. $\frac{1}{2}[4^{1/3}-1]$ 11. $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}-\frac{7}{6}\right]$

பயிற்சி 4

1. 1·98998 2. 9·993 3. 5·01329 4. 4·021 5. 1·2599

6. 0·100005 7. 1·0027 8. 0·059999 9. 0·02000

10. $1-\frac{23}{6}\cdot x$

பயிற்சி 5

2. $(-1)^n\cdot\left(\frac{1+n-3n^2}{n!}\right)$ 3. $(-1)^n\cdot\left(\frac{a-bn}{n!}\right)$

4. $\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{e^2\cdot n!}$ 5. $\frac{e(1-n)}{n!}$ 9. $\frac{2^9}{10!}$

பயிற்சி 6

1. $\frac{e(e^4-1)}{4}$ 3. $\frac{3e}{2}$ 4. $\frac{17e}{6}$ 5. $5e-1$ 6. $\frac{27e}{4}$ 7. $15e$

8. $3e$ 9. $9e-4$ 10. $23e^3-2$ 11. $5e-1$ 18. $2e-5$

19. $2e-\frac{7}{2}$ 20. $e-2$ 21. $\frac{1}{2e}$ 22. $4e-5$.

பயிற்சி 7 (b)

1. $2\log 2-1$

5. (i) $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2x}+\log\left(\frac{1-x}{x^2}\right)\right]$

(ii) $\left(\frac{15-x^2}{2+x^2}\right) \log(1-x) + \frac{x^2+5x-10}{4x(x-1)}$

(iii) $\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{4}{9e}(2x^3+3x^2+6x) - 3\log(1-x)$

(iv) $1 - \log 2$

(v) $\frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{3}{x^2}\left(\log(1-x)+x+\frac{x^2}{2}\right)$

6. (i) 2 ; (ii) 0 ; (iii) $\frac{1}{10}$; (iv) $\frac{3}{2}$

பயிற்சி 8

5. $x=4$; $y=2$; $z=3$

6. $x=y=z=1$

7. $x = \frac{d(c-d)(d-b)}{(c-a)(a-b)}$

$y = \frac{d(d-c)(a-d)}{(b-c)(a-b)}$

$z = \frac{d(d-a)(b-d)}{(b-c)(c-a)}$.

பயிற்சி 9

1. 1·32 2. 2·19 3. 3·28 4. 2·19 5. 2·99

பயிற்சி 10

1. $x=1$; $y=2$; $z=3$

2. $x=\pm\frac{ca}{b}$; $y=\pm\frac{ab}{c}$; $z=\pm\frac{bc}{a}$

3. $x=1$ அல்லது -7 ; $y=1$ அல்லது -11 ;
$z=1$ அல்லது -15

4. $x=1$; $y=2$; $z=3$; $x=-7$; $y=-8$; $z=-9$

5. $x=3$; $y=4$; $z=5$; $x=-1$; $y=-2$; $z=-3$

6. $x=\pm\frac{3}{2}$; $y=\pm\frac{1}{2}$; $z=0$

8. $x=y=z=1$; $x=-7$; $y=-11$; $z=-15$.

பயிற்சி 11

1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{5}{36}$ 3. $\frac{3}{13}$

பயிற்சி 12

1. $\frac{13}{18}$ 2. $\frac{5}{36}$ 3. $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$ 4. $\frac{5}{16}$ 5. $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{2}$

6. $\frac{1}{12}$ 7. $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ 8. $\frac{137}{228}$; $\frac{1}{114}$ 9. $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49}$

வகைநுண் கணிதம்

1. சார்புகள்

1·1. மாரு இராசிகளும், மாறு இராசிகளும் (Constants and variables): மாருத் தன்மையுள்ள இராசிகள் 'மாரு இராசிகள்' என்று குறிக்கப்படும். உதாரணமாக ஒரு முக் கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூட்டளவு, ஒரு வட்டத்தில் வட்டப்பரிதிக்கும் ஆரத்திற்குமுள்ள விகிதம் முதலியன 'மாரு இராசிகள்' எனப்படுவன. ஓடிக்கொண் டிருக்கும் காரின் வேகம், மேல் நோக்கி எறியப்படும் ஒரு கல்லின் உயரம் இவை யாவும் மாறும் தன்மையை உடை யவை. இவைகளை 'மாறு இராசிகள்' எனச் சொல்லலாம். மாரு எண்கள் a, b, c. R ...... முதலிய எழுத்துக்களாலும், மாறும் எண்கள் x, y, z ......, u, v, w, ... என்ற எழுத்துக் களாலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

1·2. சார்புகள் (Functions): மாறும் இராசிகளில் ஒன்று மற்ருென்றைத் தழுவி அமைந்தால், அவ்விரண்டிற்குமுள்ள தொடர்பை 'சார்பு' எனச் சொல்வோம். ஒரு நீண்ட சதுரத் தின் பரப்பளவு, அஃதின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் பொறுத்தது. பரப்பளவு, நீளம் அகலம் இவற்றின் 'சார்பு' ஆகும். பரப்பளவு, நீள அகலங்களின் மதிப்பைப் பொருத்த தாகும். பரப்பளவை 'சார்புடை மாறி' எனவும் (Dependent variable), நீள அகலங்களை 'சார்பில் மாறிகள்' (Independent variables) எனவும் வழங்குவோம். இம்மூன்று மாறிகளின் தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாட்டை 'சார்புத் தொடர்பு' (Functional relation) எனச் சொல்வோம்.

பொதுவாக x, y என்ற இரு மாறிகள் இருப்பின், y ன் மதிப்பு x இன் மதிப்பைத் தழுவுவதாகவிருந்தால், $y = f(x)$ என்ற குறியீடு, அவற்றுள் அமையும் சார்புத் தொடர்பைச் சமன்பாடு ரூபத்தில் விவரிப்பதாகும். சார்புத் தொடர்புகள்

x, y மாறிகளை உடைய உருவத்தைப் பெருமல், சில குறிப்பிட்ட உருவங்களையும் பெற்றதாகவும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கோளத்தின் கன அளவு, அஃதின் ஆரத்துடன் சார்புப் பெற்றது. அஃதை $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இதுவும் ஒரு சார்புத் தொடர்பாகும்.

1·3. சார்புகளில் பலவகை உண்டு: உதாரணமாக, $f(x) = x^2 + x - 2$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். x-ன் ஒவ்வொரு அசல் மதிப்பிற்கும் (real value), y க்கு அசல் மதிப்பு கிடைக்கும். $y = \sqrt{1 - x^2}$ என்ற சார்பில், x ன் மதிப்பு $-1, +1$ என்ற இவ்விரு மதிப்புகளுக்கிடையில் இருந்தால் y ன் மதிப்பு அசல் மதிப்பாகும். x ன் மதிப்பு $-1, +1$ என்ற எண்களுக்கிடையில் இல்லாமல், வேறு எண்ணாக அமைந்தால், y ன் மதிப்பு கற்பனை எண் (imaginary) ஆகும்.

$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ என்ற சார்பில், x க்கு இரண்டைத் தவிர மற்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் y க்கு அசல் மதிப்பு கிடைக்கும். ஆனால் x க்கு '2' என்ற மதிப்பைப் பிரதியிட்டால், $y = \frac{4}{0}$ என்ற மதிப்பைப் பெறும். இது வரம்பற்ற மதிப்பு ஆகும். ஆகவே இரண்டைத் தவிர மற்ற எல்லா x ன் மதிப்புகளுக்கும் இந்தச் சார்பில் y ன் மதிப்பு வரையறுக்கப்படும்.

1·4. ஒரு மதிப்புடைய சார்புகளும், பன் மதிப்புடைய சார்புகளும் (Single and Many valued Functions): ஒரு சார்பில் x ன் மதிப்புக்கு ஒப்ப, y க்கு ஒரே மதிப்பு இருக்குமாகில், அந்தச் சார்பு 'ஒரு மதிப்புடைய சார்பு' என்று சொல்லப்படும். உதாரணமாக, $y = \frac{2x+3}{5x+9}$, $y = \sin x$ ஒரு மதிப்புடைய சார்புகள்.

ஒரு சார்பில் x ன் ஒரு மதிப்புக்கு ஒப்ப y க்கு ஒன்றிற்கு மேலான மதிப்புகள் இருக்குமாகில், அந்தச் சார்பை 'பன் மதிப்புள்ள சார்பு' என்று கூறலாம். உதாரணமாக $y^3 - 6y^2 + 11y = x$ என்ற சார்பில், x ன் ஒரு மதிப்புக்கு ஒப்ப, y க்கு மூன்று மதிப்புகள் இருப்பதைக் காணலாம்.

1·5. **வெளிப்படு சார்புகள், உட்படு சார்புகள் (Explicit and Implicit Functions)**: x, y என்ற மாறிகளின் சார்புத் தொடர்பு, $y = f(x)$ என்ற உருவத்தில் அமையப்பெற்று, x க்கு ஈடாக எந்த மதிப்பைக் கொடுத்தாலும், y ன் மதிப்பை நேரடியாகக் காண முடிகிறதோ அச்சார்பை 'வெளிப்படு சார்பு' என்கிறோம். உதாரணமாக, $y = x^2 - 2x + 5$; $y = \cos x$ வெளிப்படு சார்புகள் ஆவன.

x, y மாறிகளின் சார்புத் தொடர்பு $F(x, y) = 0$ என்ற உருவத்தில் அமையப்பெற்று x ன் மதிப்பைப் பிரதியிட்டவுடன், y ன் மதிப்பை நேரடியாகப் பெறாமல், இயல் முறையைக்கையாண்டபின்னரே y ன் மதிப்பு கிட்டினால், அந்தச் சார்பை 'உட்படு சார்பு' எனச் சொல்வோம். உதாரணமாக,

$$x^2 + xy + y^2 = 5\,; \quad x^2 + y^2 = a^2$$

முதலியன உட்படு சார்புகள்.

1·6. **ஒற்றைச் சார்புகளும், இரட்டைச் சார்புகளும் (Odd and Even Functions)**: எந்த ஒரு சார்பில் x க்குப் பதிலாக, $-x$ ஐ பிரதியிட்டால், சார்பின் மதிப்பில் குறிமாற்றம் ஏற்படுகிறதோ, அச்சார்பை 'ஒற்றைச் சார்பு' எனச் சொல்வோம். உதாரணமாக, $y = x^3 + 2x$ என்ற சார்பில், x க்குப் பதிலாக $-x$ ஐ பிரதியிட்டால் $y = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x)$ என்றாகி, குறிமாற்றம் y ன் மதிப்பில் ஏற்படுகிறது. இஃது ஒற்றைச்சார்பின் எடுத்துக் காட்டாகும். $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = x^5 + x^3 + x$ முதலியன 'ஒற்றைச் சார்புகள்' ஆகும். பொதுவாக, $f(-x) = -f(x)$ ஆனால் $f(x)$ 'ஒற்றை'ச் சார்பாகும்.

எந்த ஒரு சார்பில் x க்குப் பதிலாக, $-x$ ஐப் பிரதியிடும் பொழுது, சார்பின் மதிப்பில் குறிமாற்றம் ஏற்படுவதில்லையோ அச்சார்பை 'இரட்டைச் சார்பு' எனச் சொல்லலாம். உதாரணமாக, $y = \cos x$ என்ற சார்பில், x க்குப் பதிலாக $-x$ ஐச் செலுத்தினால், $y = \cos(-x) = \cos x$ ஆகும். y ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை. இது 'இரட்டைச் சார்பின்' சிறந்த எடுத்துக் காட்டாகும். $y = x^4 - 2x^2$; $x^2 + y^2 = a^2$; முதலியன 'இரட்டைச் சார்புகள்'. பொதுவாக இரட்டைச் சார்பில் $f(-x) = f(x)$ ஆகும்.

1·7. **எதிர்மறைச் சார்புகள் (Inverse Functions)**: $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் y, x ன் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதனைத் தீர்த்து x ஐ y ன் சார்பாக எழுதினால் அச்

சார்பு 'எதிர்மறைச் சார்பு' ஆகும். உதாரணமாக $y = \frac{x+1}{x-1}$ எனக் கொள்வோம். இதனை விடுவித்து, x ன் மதிப்பைப் பெற்றால், $x = \frac{y+1}{y-1}$ ஆகிறது. இது எதிர்மறைச் சார்பின் எடுத்துக் காட்டாகும். மற்றொரு உதாரணமாக, $y = \sin x$ என்றால், $x = \sin^{-1} y$ என்பதைக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 1.

$f(x) = (2x-1)(x-3)$ என்றால் $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ என்பவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = (2x-1)(x-3)$$

$$f(0) = (-1)(-3) = 3$$

$$f(1) = (+1)(-2) = -2$$

$$f(2) = (4-1)(2-3) = -3$$

மாதிரி 2.

$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ எனின், $x = f(y)$ என்று நிறுவுக.

$$y = \frac{ax+b}{cx-a}$$

$$y(cx-a) = ax+b$$

$$x(cy-a) = b+ay$$

$$x = \frac{ay+b}{cy-a} = f(y)$$

பயிற்சி 13

1. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ எனின் $f(1)$, $f(2)$; $f(-1)$, $f(-2)$ என்பனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

2. $f(x) = x^2+x-1$ என்றால் $f(x+1) - 3f(x) + 2f(x-1)$ என்பதைச் சுருக்கி எழுதுக.

3. $f(x) = \log x$ என்றால், $f(abc) = f(a) + f(b) + f(c)$ என்று நிரூபி.

4. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\cot x$, இவைகளில் ஒற்றைச் சார்புகளைக் குறிப்பிடுக.

5. $f(A) = \tan A$ என்றால் $f(A+B) = \dfrac{f(A) + f(B)}{1 - f(A) \cdot f(B)}$ என்று நிறுவுக.

2. எல்லைகள்

(Limits)

2·1 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$ என்ற பெருக்கத் தொடர் (Geometric Progression) எடுத்துக் கொண்டு, அத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் கவனிப்போம். கூட்டுத் தொகையை S என்று கொண்டால்

$$S = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\,.\,3^{n-1}}$$

கூட்டுத் தொகைக்காக எடுத்துக் கொள்ளும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ஏற ஏற, அதாவது n ன் மதிப்பு கூடக்கூட $\frac{1}{2\,.\,3^{n-1}}$ ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே வரும். n ன் மதிப்பு 'எண்ணிலி' (infinity) யை நெருங்கும் பொழுது $\frac{1}{2\,.\,3^{n-1}}$ ன் மதிப்பு சுன்னத்தை நெருங்கும். S ன் மதிப்பு $\frac{3}{2}$ ஐ அணுகும். S ன் எல்லை $\frac{3}{2}$ என்று கூறலாம்.

x என்ற மாறிக்குக் கணக்கற்ற மதிப்புகள் தரமுடியும். அந்த மதிப்புகள் நிலை எண்ணை a ஐ நெருங்கினல், x க்கும் a க்கு முள்ள மதிப்பு வித்தியாசம் மிகக்குறைவாக அமையும். மதிப்பு வித்தியாசத்தை $|x-a|$ என்று குறிப்பிடுவோம். இதின் மதிப்பை மிகச்சிறிய மிகை எண்ணை ϵ ஐ விடக் குறைவாக இருக்குமாறு செய்யலாம். அப்பொழுது 'a' என்ற எல்லையை x நெருங்குகின்றது அல்லது நோக்குகிறது

என்றும் அதை $x \to a$ என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். Lt $x = a$ என்றும் சொல்வார்கள்.

2·2. சார்பின் எல்லை (Limit of a Function): $y = f(x)$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். a ஐ x ன் மதிப்புகள் நெருங்கும் பொழுது, $f(x)$ 'l' என்ற எல்லையை நெருங்கட்டும். இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ϵ என்ற மிகை எண், எவ்வளவு சிறியதாக இருப்பினும் அதற்குத் தகுந்தமாதிரி $|x - a| < \delta$ ஆக இருக்கையில், $|f(x) - l| < \epsilon$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குக் கீழ்ப்படிந்து, δ மிகை எண் இருக்குமானால், l என்ற எல்லையை $f(x)$ நெருங்கும் எனச் சொல்லலாம். இதனை $\operatorname*{Lt}_{x \to a} f(x) = l$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். உதாரணமாக, $\operatorname*{Lt}_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ஐக் காண்போம். $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். x க்கு ஒன்றைத் தவிர எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம். x ன் மதிப்புகள் ஒன்றை மேலிருந்தும், கீழிருந்தும் நெருங்கும் பொழுது y ன் மதிப்புகள் '2' என்ற மதிப்பைச் சுற்றி வட்டமிடுகின்றன. ஆகவே, x ன் மதிப்புக்கும் ஒன்றிற்கும் வேற்றுமையை மிகச் சிறிதாக்கினால் y ன் மதிப்புக்கும் '2' க்கு முள்ள வேற்றுமை சிறிதாகிறது. ஆகவே $\operatorname*{Lt}_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. ஆனால் x க்கு 'ஒன்று' என்ற மதிப்பை ஈடாக்கினால், நாம் y ன் மதிப்பை $\dfrac{0}{0}$ என்ற 'தேரப்பெறுதது' (indeterminate) ஆகக் காண்கிறோம்.

முன்கூறிய முறையில் 'எல்லை' காணுவது நடைமுறைக்கு ஒவ்வாது. பின்வரும் முறையைத்தான் கையாளவேண்டும். $\operatorname*{Lt}_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ என்றதில் $x = 1 + h$ என்றதைப் பிரதியிடுவோம். $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(1 + h)^2 - 1}{(1 + h) - 1} = 2 + h$. x ஒன்றை நெருங்கும் பொழுது, h சுன்னத்தை நெருங்கும்.

$$\operatorname*{Lt}_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \operatorname*{Lt}_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

2·3. சார்புகளின் எல்லையைக் காணக் கையாளும் விதிகள் (Working Rule) :

(1) x, a ஐ நெருங்கும் பொழுது எல்லையைக் காண வேண்டுமென்று வைத்துக் கொள்வோம். $x = a + h$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிடுவோம்.

(2) பின்னத்தின் மேல், கீழ் பாகங்களை விரிவாக எழுதி, இரண்டிற்கும் பொதுவாகக் காணப்படும் சினை (factor) இருப்பின் அதனை நீக்கவேண்டும்.

(3) நீக்கிய பிறகு, h க்குச் சுன்ன மதிப்பைப் போட வேண்டும்.

(4) எஞ்சியுள்ள மதிப்புத்தான் 'சார்பின் எல்லை' என்று அறியவும்.

(5) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \; f(x)$ காணவேண்டுமானல் முதலில் $x = \dfrac{1}{y}$ என்பதைச் சார்பில் பிரதியிட வேண்டும். சார்பு 'y' மாறியை உடையதாக மாறும். பின் y க்குச் சுன்ன மதிப்பு நெருங்கும் பொழுது எல்லையைக் காண வேண்டும்.

2·4. எல்லையைக் காணப் பயன்படும் சில தேற்றங்கள்.

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; f(x) = \alpha \; ; \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \phi(x) = \beta$$ எனக்

கொள்வோம்.

1. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \{ f(x) \pm \phi(x) \} = \alpha \pm \beta$

2. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \{ f(x) \, . \, \phi(x) \} = \alpha \, . \, \beta$

3. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

4. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; f \{ \phi(x) \} = f(\beta)$

2·5. இரண்டு அடிப்படை எல்லைத்தேற்றங்கள் (Two fundamental theorems on limits) :

(i) இயல் முறையில் நிறுவப்படும் எல்லை (Algebraic limit) : n ஒரு முழுஎண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ இருப்பினும்

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

தெரிப்பு : இடப்பக்கத்திலிருக்கும் கோவையில் x க்குப் பதில் $(a + h)$ ஐ ஈடாக்குவோம்.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{a+h-a} = \frac{a^n\left(1 + \frac{h}{a}\right)^n - a^n}{h}$$

$$= \frac{a^n\left[1+n\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \dots\right] - a^n}{h}$$

[ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தில், விகிதமுறு படிக்குக் கிடைக்கும் விரிப்பை (Binomial theorem for a rational index) உபயோகித்துக் கோவையில் மேற்பகுதி விரிக்கப் பெற்றுள்ளது என்பதைக் காணவும். $\left|\frac{h}{a}\right| < 1$ ஆகவிருப்ப தால், ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தால் விரிப்பு எழுதுவதில் முரண்பாடில்லை.]

x, a ஐ நெருங்கினுல், $h \to 0$.

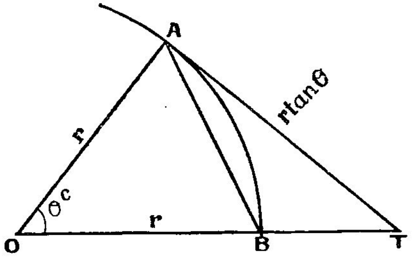
$\therefore \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} [na^{n-1} + h$ யையும் அதன் படிகளையுமுடைய உறுப்புக்கள்].

$$= n \cdot a^{n-1}$$

(ii) திரிகோண முறையில் நிறுவப்படும் எல்லை (Trigonometric Limit) :

$$\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ ஆரையன் அளவை})$$

தெரிப்பு :



படம் 1

O வை மையமாகவும், r ஐ ஆரமாகவுமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதில் 'θ' ஆரையன்களை வட்டமையத்தில் தாங்கும் AOB என்ற வட்டக்கோணப் பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். A என்ற புள்ளியில் வட்டத்திற்கு AT என்ற தொடுவறை வரைவோம். அது OB ஐ T ல் வெட்டட்டும்.

படத்தில், $\tan\theta = \dfrac{AT}{OA} = \dfrac{AT}{r}$

$$\therefore \quad AT = r\tan\theta$$

$\triangle AOB$ ன் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} AO \,.\, OB \,.\, \sin A\hat{O}B$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin\theta.$$

AOB என்ற வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} r^2 \theta.$

$\triangle AOT$ என்ற செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} AO \,.\, AT = \dfrac{1}{2} r^2 \tan\theta$

படத்தில், $\triangle AOB <$ AOB வட்டக்கோணப் பகுதி பரப்பு $< \triangle AOT$.

$$\frac{1}{2} r^2 \sin\theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \tan\theta$$

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta.$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$\theta \to 0$ ஆனல், $\cos\theta \to 1$.

$\frac{\theta}{\sin\theta}$ ன் மதிப்பு ஒன்றிற்கும், ஒன்றை மிக அண்மையில் நெருங்கும் மதிப்பிற்கு மிடையே அமைகிறது.

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

அதாவது, $\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

குறிப்பு : $\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

$$\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} . \operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1.$$

மாதிரி 1.

1. மதிப்புக் காண்க : $\operatorname*{Lt}_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{x^m - a^m}{x - a} . \frac{x - a}{x^n - a^n}$$

$$= \frac{\frac{x^m - a^m}{x - a}}{\frac{x^n - a^n}{x - a}}.$$

$$\operatorname*{Lt}_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{\operatorname*{Lt}_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}}{\operatorname*{Lt}_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}}$$

$$= \frac{m . a^{m-1}}{n . a^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

மாதிரி 2.

$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ன் மதிப்புக் காண்க.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \left\{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$x\to 0$ ஆனல், $\frac{x}{2}\to 0.$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left\{\underset{\frac{x}{2}\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

மாதிரி 3.

$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

மாதிரி 4.

$$\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{lx^2+mx+n}{l^1x^2+m^1x+n^1}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$x = \frac{1}{y}$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிட

$$\frac{lx^2+mx+n}{l^1x^2+m^1x+n^1} = \frac{\frac{l}{y^2}+\frac{m}{y}+n}{\frac{l^1}{y^2}+\frac{m^1}{y}+n^1} = \frac{l+my+ny^2}{l^1+m^1y+n^1y^2}$$

$x\to\infty$ ஆனால் $y\to 0$

$$\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{lx^2+mx+n}{l^1x^2+m^1y+n^1} = \underset{y\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{l+my+ny^2}{l^1+m^1y+n^1y^2} = \frac{l}{l^1}.$$

மாதிரி 5.

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ (1+x)^{1/x}$$ ஐக் காண்க.

$x = \frac{1}{n}$ ஐ ஈடாக்குக, $x\to 0$ ஆனால், $n\to\infty$

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ (1+x)^{1/x} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e.$$

பயிற்சி 14

1. $\underset{x\to 2}{\mathrm{Lt}}\ \frac{x^5-32}{x-2}$.

2. $\underset{x\to 3}{\mathrm{Lt}}\ \frac{x^3-27}{x^5-243}$.

3. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{(1+x)^4-1}{(1+x)^2-1}$.

4. $\underset{x\to 1}{\mathrm{Lt}}\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

5. $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{(2x+1)\ (3x-4)}{(x-1)\ (x+7)}$.

6. $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\sqrt{3a-x}-\sqrt{x+a}}{x-a}$.

7. $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{1+2+\ldots\ldots+n}{n^2}\right)$.

8. $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2}{n^3}\right)$.

9. $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \{\sqrt{x^2+x+1} - x\}$.

10. $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^{5/2}-1}{x^{3/2}-1}$.

11. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\tan a\theta}{\tan b\theta}$.

12. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{1-\cos a\theta}{1-\cos b\theta}$.

13. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\sin^{-1}\theta}{\theta}$.

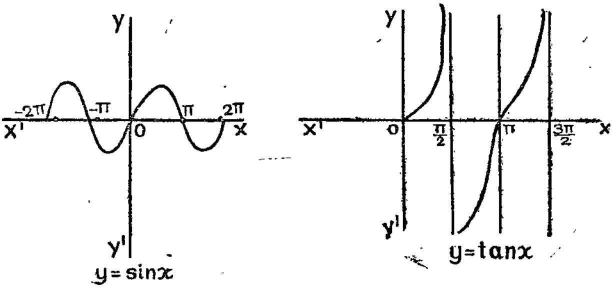
14. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\mathrm{Lt}} (\sec x - \tan x)$

15. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}{\theta}$.

2·6. தொடருடைச் சார்புகளும், தொடரிலாச் சார்புகளும் (Continuous and Discontinuous Functions).

எந்தச் சார்பையும் வளைவரை மூலமாகக் குறிப்பிட முடியும். அந்த வளைவரையைப் பார்த்துச் சார்பின் பண்புகளை அறியலாம். உதாரணமாக எந்தச் சார்பின் வளைவரை தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்கிறதோ, அந்தச் சார்பைத் தொடருடைச் சார்பு (Continuous Function) என்றும், வளை வரை தொடராகவில்லாமல் ஆங்காங்கு இடைவெளிகள் நிறைந்ததாகவிருப்பின் அச் சார்பைத் தொடரிலாச் சார்பு (Discontinuous function) என்றும் அறியலாம்.

$\sin x$, $\cos x$ என்ற கோண கணித சார்புகளின் வளை வரைகள் தொடர்ச்சியுடையதாகவிருப்பதால் அவற்றைத் தொடருடைச் சார்புகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகவும், $\tan x$, $\sec x$ என்ற கோண கணித சார்புகளின் வளைவரைகள் ஆங்காங்கு அறுபட்டு இருப்பதால், அவைகளைத் தொடரிலாச் சார்பு களுக்கு எடுத்துக் காட்டாகவும் கொள்ளலாம்:



படம் 2

3. வகைக் கெழு

(The Differential Coefficient)

3·1. வரையறை: $y=f(x)$ என்ற தொடருடைச் சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தச் சார்பில் x ன் மதிப்பு ஏற ஏற, y ன் மதிப்பு கூடவோ, குறையவோ செய்யும். x, y இவைகளின் கூடும் தொகைகளை (increments), $\triangle x$, $\triangle y$ என்ற குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம். $\triangle x$ ன் மதிப்பு எந்த அளவுக்குச் சிறியதாக உள்ளதோ, அதற்கொப்ப, $\triangle y$ ன் மதிப்புச் சிறியதாகவே இருக்கும். $\triangle x$ ன் மதிப்பு சுன்னத்தை நெருங்கும் பொழுது, $\triangle y$ ன் மதிப்பும் மிகச் சிறியதாகும். $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ என்ற விகிதம், $\triangle x$ சுன்னத்தை நெருங்கும் பொழுது, ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை நெருங்கும். இவ்வெல்லை x ஐப் பொறுத்த y ன் வகைக்கெழு (differential coefficient of y with respect to x) எனச் சொல்லப்படும். இதனை $\frac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆகவே $\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ என்றறிய முடிகிறது.

$y=f(x)$ எனக் கொள்வோம்.

$$y+\triangle y=f(x+\triangle x)$$

$$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ஆகவே, $f(x)$ ன் வகைக் கெழுவை, $f'(x)$ என்றும் $Df(x)$ என்றும், y ன் வகைக் கெழுவை $D_x y$ என்றும் அல்லது வெறும் D_y என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

வரையறையை உபயோகித்து வகைக்கெழு காணும் முறையை 'ஆதி முறைப்படி காணும் வகைக்கெழு' (Differential coefficient from first principles) எனச் சொல்வது வழக்கம்.

3·2. ஆதி முறைப்படி வகைக்கெழு காணக் கையாள வேண்டிய வழி விதிகள் :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை y எனக் குறிக்க வேண்டும்.

(ii) அதில், x ஐ $(x+\triangle x)$ ஆலும், y ஐ $(y+\triangle y)$ ஆலும் பிரதியிடுக.

(iii) $\triangle y$ ன் மதிப்பை [(ii) − (i)] க் காணவும்.

(iv) $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ஐ மதிப்பிடுக.

(v) $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ல், $\triangle x$ சுன்னத்தை அடையும்பொழுது நிற்கும் மதிப்பைக் காண்க. இதுதான் x ஐப் பொருத்த y ன் வகைக் கெழு ஆகும்.

3·3. திட்ட அமைப்புகளைப் பெற்ற பல சார்புகளின் வகைக் கெழுக்கள் (Differential coefficients of several functions in their standard forms).

3·3.1. x^n ன் வகைக்கெழு :

$$y = x^n$$

x ன் கூடும் தொகை $\triangle x$ ஆகவும், y ன் கூடும் தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$y+\triangle y = (x+\triangle x)^n$$

$$\triangle y = (x+\triangle x)^n - x^n$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{\triangle x}$$

$$= \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{(x+\triangle x) - x}$$

$\triangle x$ சுன்னத்தை நெருங்கும்பொழுது, $(x+\triangle x)$, x ஐ நெருங்கும்.

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{(x+\triangle x)\to x}{\text{Lt}} \frac{(x+\triangle x)^n - x^n}{(x+\triangle x) - x} = n \,.\, x^{n-1}$$

(முதல் அடிப்படை எல்லைத் தேற்றத்தை உபயோகிக்கிறோம்).

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = n \,.\, x^{n-1}$$

3·3.2 sin x ன் வகைக்கெழு.

$$y = \sin x$$

x ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆகவும், y ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$y + \triangle y = \sin (x + \triangle x)$$

$$\triangle y = \sin (x+\triangle x) - \sin x$$

$$= 2 \cos \left(\frac{x+\triangle x+x}{2}\right) \sin \left(\frac{x+\triangle x - x}{2}\right)$$

$$= 2 \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}$$

$$= \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \frac{\sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}}$$

$\triangle x$ சுன்னத்தை நெருங்கும் பொழுது, $\frac{\triangle x}{2} \to 0$.

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\frac{\triangle x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \underset{\frac{\triangle x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \,.\, 1 \qquad \left[\because \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

3·3.3 cos x ன் வகைக் கெழு.

$$y = \cos x.$$

x ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆகவும், y ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$y + \triangle y = \cos(x + \triangle x)$$

$$\triangle y = \cos(x + \triangle x) - \cos x$$

$$= -2\sin\left(\frac{x + \triangle x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x + \triangle x - x}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}$$

$$= -\sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \frac{\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}$$

$\triangle x$ சுன்னத்தை நெருங்கும் பொழுது, $\frac{\triangle x}{2} \to 0$.

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{\text{Lt}} - \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x . 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

3·3.4 tan x ன் வகைக்கெழு.

$$y = \tan x$$

$$y + \Delta y = \tan(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \tan(x + \Delta x) - \tan x$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos(x+\Delta x) . \cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\cos(x+\Delta x) . \cos x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\cos(x+\Delta x) . \cos x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} . \frac{1}{\cos(x+\Delta x) . \cos x}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} . \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos(x+\Delta x) . \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 . \frac{1}{\cos x . \cos x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

3·3.5 cosec x ன் வகைக்கெழு.

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$y + \Delta y = \operatorname{cosec}(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \operatorname{cosec}(x+\Delta x) - \operatorname{cosec} x$$

$$= \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin (x + \triangle x)}{\sin (x + \triangle x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{-2 \cos \left(\frac{x + x + \triangle x}{2}\right) \sin \left(\frac{x - x - \triangle x}{2}\right)}{\sin (x + \triangle x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{-2 \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\sin (x + \triangle x) \cdot \sin x}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-2 \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\triangle x}{2}}{\sin (x + \triangle x) \cdot \sin x \cdot \triangle x}$$

$$= \frac{-\cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\sin (x + \triangle x) \cdot \sin x} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\frac{\triangle x}{2} \to 0}{\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}}} \frac{-\cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\sin (x + \triangle x) \sin x} \cdot \underset{\frac{\triangle x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x} \cdot 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x.$$

3·3.6 e^x ன் வகைக் கெழு.

$$y = e^x$$

$$y + \triangle y = e^{x + \triangle x}$$

$$\triangle y = e^{(x + \triangle x)} - e^x$$

$$= e^x (e^{\triangle x} - 1)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{e^x (e^{\triangle x} - 1)}{\triangle x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x (e^{\triangle x} - 1)}{\triangle x}$$

$$= e^x \cdot \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{e^{\triangle x} - 1}{\triangle x}\right)$$

$$= e^x \cdot 1$$

[இங்கு $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ என்பதை உபயோகித்துள்ளோம்]

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

3·3.7 $\log_e x$ ன் வகைக்கெழு.

$$y = \log_e x$$

$$y + \triangle y = \log_e (x + \triangle x)$$

$$\triangle y = \log_e (x + \triangle x) - \log x$$

$$= \log_e \left(\frac{x + \triangle x}{x}\right)$$

$$= \log_e \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x} \cdot \log_e \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\triangle x} \cdot \log_e \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_e \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}$$

$\triangle x \to 0$ பொழுது, $\frac{\triangle x}{x} \to 0$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x} \cdot \underset{\frac{\triangle x}{x} \to 0}{\text{Lt}} \log_e \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}$$

$$= \frac{1}{x} \log_e e$$

$$= \frac{1}{x} . 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

3.3.8 $\sqrt{x}$ன் வகைக்கெழு.

$$y = \sqrt{x}$$

$$y + \triangle y = \sqrt{x + \triangle x}$$

$$\triangle y = \sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+\triangle x} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x+\triangle x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\triangle x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x+\triangle x) - x}{(\sqrt{x+\triangle x} + \sqrt{x}) \,.\, \triangle x}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+\triangle x} + \sqrt{x})}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{x+\triangle x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3·3.9 கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களை மனதில் இருத்திக்கொள்வது அவசியம்.

வ. எண்.	சார்பு	வகைக்கெழு.
1.	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
2.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
3.	$\sin x$	$\cos x$
4.	$\cos x$	$-\sin x$
5.	$\tan x$	$\sec^2 x$
6.	$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
7.	$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
8.	$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
9.	e^x	e^x
10.	$\log_e x$	$\frac{1}{x}$

3·4 வகைக்கெழு காணப் பயன்படும் சில அடிப்படைத் தேற்றங்கள்.

தேற்றம் 1 : ஒரு மாறிலியின் வகைக்கெழு சுன்னமாகும்.

மாறிலி ‘ C ’ ஆகவிருக்கட்டும்.

$$y = C$$

Cக்குக் கூடுந்தொகை இல்லை. y க்குக் கூடுந்தொகை, $\triangle y$ எனக் கொண்டால், அது இருக்குமாகில், $y + \triangle y = C$ ஆகவே இருக்கும்.

$$\triangle y = 0$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 0$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

3·4.1 தேற்றம் 2: (நிலை எண் × சார்பு) ன் வகைக் கெழு = நிலை எண் × சார்பின் வகைக்கெழு ஆகும்.

$y = a \,.\, u$ எனக் கொள்வோம். இங்கு 'a' ஒரு நிலை எண்; u என்பது x ன் சார்பு. x ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆனல், அதற்கொப்ப u வின் கூடுந்தொகை $\triangle u$ ஆகவும், y ன் கூடுந் தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கும்.

$$y + \triangle y = a\,(u + \triangle u)$$

$$\triangle y = a \,.\, \triangle u$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = a \,.\, \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = a \,.\, \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, \frac{du}{dx}$$

3·4.2 தேற்றம் 3: சார்புகள் தம் கூட்டுத் தொகையின் வகைக்கெழு, அவைகளின் வகைக் கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

u, v, இவைகள் x ன் சார்புகளாக இருப்பின், $y = u + v$ ஆக இருக்கட்டும். x, $\triangle x$ என்ற கூடுந்தொகையைப் பெறும் பொழுது, u, $\triangle u$ வையும், v, $\triangle v$ ஐயும், கூடுந் தொகை களாகப் பெறட்டும். y, $\triangle y$ ஐக் கூடுந்தொகையாகப் பெறட்டும்.

$$y + \triangle y = (u + \triangle u) + (v + \triangle v)$$

$$\triangle y = \triangle u + \triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x} + \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

எடுத்துக்காட்டாக (i) $y = 8x^2$, $\frac{dy}{dx}$ ன் விடை ?

$$\frac{dy}{dx} = 8 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = 8 \, . \, 2x = 16x$$

(ii) $y = 3x^2 - 5x + 6$, $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5 \, . \, 1 + 0 = 6x - 5$$

3·4.3 தேற்றம் 4 : சார்பிரண்டின் பெருக்கற்பலனின் வகைக் கெழு :

u, v என்பவை x ன் இரு சார்புகள் ஆகட்டும். $y = uv$.

x, $\triangle x$ ஐக் கூடுந் தொகையாகப் பெறும் பொழுது

u, $\triangle u$ ஐக் கூடுந் தொகையாகவும்,

v, $\triangle v$ ஐக் கூடுந் தொகையாகவும்,

y, $\triangle y$ ஐக் கூடுந் தொகையாகவும் பெறட்டும்.

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)\,(v + \triangle v)$$

$$\begin{aligned}\triangle y &= (u + \triangle u)\,(v + \triangle v) - uv \\ &= uv + u \, . \, \triangle v + v \, . \, \triangle u + \triangle u \, . \, \triangle v - uv \\ &= u \, . \, \triangle v + v \, . \, \triangle u + \triangle u \, . \, \triangle v.\end{aligned}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u \, . \, \frac{\triangle v}{\triangle x} + v \, . \, \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u \, . \, \triangle v}{\triangle x \, . \, \triangle x} \, . \, \triangle x$$

$\triangle x \to 0$ ஆகும் பொழுது, $\triangle u \to 0$, $\triangle v \to 0$, $\triangle y \to 0$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = u \, . \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle v}{\triangle x} + v \, . \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$$+ \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x} \, . \, \frac{\triangle v}{\triangle x} \, . \, \triangle x$$

$$\frac{dy}{dx} = u \, . \, \frac{dv}{dx} + v \, . \, \frac{du}{dx} + 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u \, . \, \frac{dv}{dx} + v \, . \, \frac{du}{dx}$$

ஆகவே, 'சார்பிரண்டின் பெருக்கற் பலனின் வகைக் கெழு = முதல் சார்பு × இரண்டாம் சார்பின் வகைக் கெழு + இரண்டாம் சார்பு × முதல் சார்பின் வகைக் கெழு' ஆகும்.

குறிப்பு : (i) $y = uvw$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = uv \cdot \frac{dw}{dx} + wv \frac{du}{dx} + wu \cdot \frac{dv}{dx}$$

அல்லது $$\frac{1}{uvw} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

(ii) $y = u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$, ஆனால்,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n} \cdot \frac{du_n}{dx}$$

மாதிரி 1.

$y = (7-3x^2)(2x+5)$ என்றால், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = (7-3x^2)\frac{d}{dx}(2x+5) + (2x+5)\frac{d}{dx}(7-3x^2)$$

$$= (7-3x^2) \,.\, 2 + (2x+5)(-6x)$$

$$= 14 - 6x^2 - 12x^2 - 30x$$

$$= -18x^2 - 30x + 14$$

மாதிரி 2.

$y = e^x \cos x \log x$ என்றால், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் கணக்கிடுக.

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos x \log x \left\{1 + \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\right\}$$

$$= e^x \cos x \log x - e^x \log x \sin x + \frac{e^x \cos x}{x}$$

3·4.4 தேற்றம் 5: *சார்பு இரண்டின் ஈவின் வகைக் கெழு = பகுதி × தொகுதியின் வகைக் கெழு − தொகுதி × பகுதியின் வகைக் கெழு / (பகுதி)^2.*

u, v x ன் சார்புகளாக இருக்கட்டும்.

$$y = \frac{u}{v}$$

x ன் கூடுந் தொகை $\triangle x$ ஆனல், u ன் கூடுந் தொகை $\triangle u$ ஆகவும், v ன் கூடுந் தொகை $\triangle v$ ஆகவும், y ன் கூடுந் தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$y+\triangle y = \frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}$$

$$\triangle y = \frac{u+\triangle u}{v+\triangle v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\,(u+\triangle u) - u\,(v+\triangle v)}{v\,(v+\triangle v)}$$

$$= \frac{v\,\triangle u - u\,.\,\triangle v}{v\,(v+\triangle v)}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\,.\,\frac{\triangle u}{\triangle v} - u\,.\,\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v\left(v + \frac{\triangle v}{\triangle x}\,.\,\triangle x\right)}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\,.\,\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x} - u\,.\,\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v\left(v + \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle v}{\triangle x}\,.\,\triangle x\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,.\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

3·4.5 தேற்றம் 5: *சார்பின் சார்பினது வகைக் கெழு:* **(Differential coefficient of function of a function).**

x ன் சார்பாக u வும், u வின் சார்பாக y ம் இருப்பின், y ஐ x ன் சார்பின் சார்பு என்று சொல்லப்படும். அஃதாவது $y = f\,(u)$, $u = \phi\,(x)$. x ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆகி, u ன்

கூடுந்தொகை $\triangle u$ ஆனால், இதனால் y ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ ஆகிறது எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \text{ ஆகும்.}$$

$\triangle x \to 0$ ஆகும் பொழுது, $\triangle u \to 0$, $\triangle y \to 0$.

$$\therefore \quad \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle u \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

குறிப்பு: $y = f(u)$, $u = \text{F}(v)$, $v = \phi(x)$

ஆனால் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

மாதிரி 1.

$y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பென்ன ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cos x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \cos x)\cos x - \sin x \cdot \sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = \frac{1}{\cos x - 1}$$

மாதிரி 2.

$y = (4 - 2x^2)^5$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$u = (4 - 2x^2)$ என்க.

$y = u^5$, $u = (4 - 2x^2)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(u^5) \cdot \frac{d}{dx}(4-2x^2)$$

$$= 5u^4 \cdot (-4x) = -20x(4-2x^2)^4$$

மாதிரி 3.

$y = \cos^3 10x$ என்றால், $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$u = 10x;\quad v = \cos u = \cos 10x;\quad y =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{dv}(v^3) \cdot \frac{d}{du}(\cos u) \cdot \frac{d}{dx}(10x)$$

$$= 3v^2 \cdot (-\sin u) \cdot 10$$

$$= -30\cos^2 10x \cdot \sin 10x$$

மாதிரி 4.

$y = \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}$$

$u = \frac{x^2-1}{x^2+1},\quad y = u^{1/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^{1/3}) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}u^{1/3-1} \cdot \left[\frac{(x^2+1)\,2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3u^{2/3}}\left[\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{4x}{3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{2/3} \cdot (x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2-1)^{2/3}(x^2+1)^{4/3}}$$

பயிற்சி 15

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காண்க.

1. $4x^3-5x^2+6x-7$.

2. ax^2+bx-d.

3. $6x^7-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{9}{x}-10$.

4. $\sqrt[3]{x^4}$.

5. $\left(\dfrac{1}{x}-x\right)^2$.

6. $(x^{1/2}-2x^{1/4})\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

7. $4e^x-\log x+\sqrt{x^5}$.

8. $\log\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)$.

9. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^3$.

10. $(1+x^2)(2-x^3)$.

11. $2x\cos x$.

12. $\sqrt{x}\,.\log x$.

13. $(2x-1)(3x^2+4)(5-7x)$.

14. $e^x\sin x\log x$.

15. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

16. $\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$.

17. $\dfrac{e^x+\sin x}{\sec x-x^2}$.

18. $\dfrac{\log x+2e^x}{1+\sec x}$.

19. $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x}}$.

20. $(x+a)^n(b-x)^m$.

21. $\cos(b-ax^n)$.

22. $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^n$.

23. $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

24. $\sin^2 5x\tan 2x$.

25. $\sin^3 2x$.

26. $\sqrt{1+\tan x}$.

27. $\sin mx\,.\cos nx$.

28. $\cos(\sin x)$.

29. $\log(\sin x)$.

30. $\cos(e^x\log x)$.

31. $\log\dfrac{a+\sqrt{x}}{b-\sqrt{x}}$. 32. $\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

33. $e^{-x}\sin 2x+\cos 3x$. 34. $\sin^m x\cos^n x$.

35. $(2x+3)^5\sqrt{x^3-1}$. 36. $\log\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

37. $\log(\sec x+\tan x)$. 38. $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

39. $e^{ax}\log\sin ax$. 40. $\log_{10} x$.

3·5 நேர்மாறு சார்பின் வகைக் கெழு:—(Differential Coefficient of Inverse Functions).

x ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆகவும், y ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ ஆகவும் இருப்பின், $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\cdot\dfrac{\triangle x}{\triangle y}=1$.

$\triangle x$ சுன்னத்தை நெருங்கும் போது, $\triangle y\to 0$.

அச்சமயத்தில் எல்லையைக் கணக்கிட்டால்

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$ என்று ஆகிறது.

3·5.1 $\sin^{-1}x$ ன் வகைக் கெழு.

$\sin^{-1}x=y$ எனக் கொள்க.

$x=\sin y$ ஆகிறது.

இரு பக்கங்களிலும் x ஐப் பொருத்த வகைக் கெழு கணக்கிட்டால்

$$1=\frac{d}{dy}(\sin y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3·5.2 $\cos^{-1} x$ ன் வகைக் கெழு.

$\cos^{-1} x = y$ ஆனால், $x = \cos y$ ஆகும்.

$$\frac{dx}{dx} = -\sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3·5.3 $\tan^{-1} x$ ன் வகைக் கெழு.

$\tan^{-1} x = y$ ஆனால் $x = \tan y$ ஆகும்.

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

3·5.4 $\operatorname{cosec}^{-1} x$ ன் வகைக் கெழு.

$\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ ஆனால் $x = \operatorname{cosec} y$ ஆகும்.

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \,.\, \cot y}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}}$$

$$= -\frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

3·5.5. $\sec^{-1} x$ ன் வகைக் கெழு.

$\sec^{-1} x = y$ ஆனால் $x = \sec y$ ஆகும்.

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \,.\, \tan y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$= \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

3·5.6. $\cot^{-1} x$ ன் வகைக் கெழு.

$\cot^{-1} x = y$ ஆனால் $x = \cot y$ ஆகும்.

$$\frac{}{dy} = - \text{cosec}^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\text{cosec}^2 y}$$

$$= - \frac{1}{1 + \cot^2 y} = - \frac{1}{1 + x^2}$$

3·6. அதிபரவளைச் சார்புகள் (Hyperbolic Functions):

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ என்ற கோவைகளை முறையே அதிபரவளை நெடுக்கை (Hyperbolic sine), அதிபரவளை கிடக்கை (Hyperbolic cosine) என்று கூறுவார்கள். அவற்றை,

$$\sin hx = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cos hx = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

என்று குறியீட்டு முறையில் எழுதுவார்கள்.

$$\therefore \quad \tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

3·6.1. அடியிற் கண்ட மூன்று வாய்பாடுகளை மனதிற் கொள்ளவும். அவைகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(ii) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

(iii) $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$

அதிபரவளைச் சார்புகளின் வகைக்கெழு:

(1) $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

(2) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

(3) $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$$

$$= \frac{\cosh x \,.\, \cosh x - \sinh x \,.\, \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x$$

3·6.2. இதே முறையில் $\cot hx$, $\text{cosec}\, hx$, $\sec hx$ களின் வகைக் கெழுக்களைக் காணலாம்.

$$y = \text{cosec}\, hx, \ \frac{dy}{dx} = -\,\text{cosec}\, hx \cot hx$$

$$y = \sec hx, \quad \frac{dy}{dx} = -\sec hx \tan hx$$

$$y = \cot hx, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} h^2 x$$

3·7 நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகள் (Inverse hyperbolic functions) :

(1) $y = \sinh^{-1} x$ ஆனால் $x = \sinh y$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - 2x\,e^y - 1 = 0$$

$$e^{2y} - 2x\,e^y = 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = 1 + x^2$$

$$(e^y - x)^2 = x^2 + 1$$

$$e^y - x = \pm\sqrt{x^2+1}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

e^y மிகை எண்ணாதலால், மிகைக்குறி பொருத்தம்.

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\therefore \quad y = \log_e (x + \sqrt{x^2+1})$$

(2) $y = \cosh^{-1} x$ ஆனால் $x = \cosh y$

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2x\,e^y = e^2y + 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 - 1$$

$$(e^y - x)^2 = x^2 - 1$$

$$e^y - x = \pm\sqrt{x^2-1}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

e^y மிகை எண்ணுதலால், மிகைக்குறி எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$e^y = x+\sqrt{x^2-1}$$

$$y = \log_e (x+\sqrt{x^2-1})$$

$y = \tan h^{-1} x$ ஆனல் $x = \tan hy$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$x(e^y+e^{-y}) = e^y - e^{-y}$$

$$e^y (1-x) = e^{-y}(1+x)$$

$$e^2y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$2y = \log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

3·7.1 நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகளின் வகைக்கெழு (Differential coefficient of Inverse hyperbolic functions) :

(1) $y = \sinh^{-1} x$ ஆனல், $x = \sinh y$

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) $y = \cosh^{-1} x$ ஆனல், $x = \cosh y$

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$$

$$= \sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(3) $y = \tanh^{-1} x$ ஆனல், $x = \tanh y$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y = 1 - \tanh^2 y$$

$$= 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

மாதிரி 1.

x ஐப் பொருத்த $\sin^{-1}\left(\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$ ன் வகைக்கெழு காண்க.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2}}$$

$$\times \frac{(b+a\cos x)(-b\sin x) - (a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2 - (a+b\cos x)^2}}$$

$$\times \frac{-b^2\sin x - ab\sin x\cos x + a^2\sin x + ab\sin x\cos x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{\sqrt{(b+a\cos x)^2 - (a+b\cos x)^2}} \times \frac{1}{(b+a\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{\sqrt{b^2+a^2\cos^2 x - a^2 - b^2\cos^2 x}} \times \frac{1}{(b+a\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{\sqrt{(b^2-a^2) - \cos^2 x\,(b^2-a^2)}} \times \frac{1}{(b+a\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}} \times \frac{1}{(b+a\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{\sqrt{b^2-a^2}\,.\,\sin x} \times \frac{1}{b+a\cos x}$$

$$= \frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

பயிற்சி 16

x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுக்களைக் கீழ்வரும் சார்பு களுக்குக் காண்க.

1. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{4}\right)$ 2. $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

3. $\tan^{-1}(\sqrt{x})$. 4. $x^2\tan^{-1}(x^3)$

5. $\log\sin^{-1}(e^x)$. 6. $\cos^{-1}(\sin x)$

7. $\tan^{-1}(\log x)$. 8. $\sqrt[3]{\tan^{-1}(e^x)}$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right)$. 10. $\cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$

11. $\tan^{-1}(1+\log^2 x)^{1/2}$. 12. $\sin^{-1}[(2x+1)\sqrt{2-x^3}]$

13. $\log\sinh(3x)$. 14. $\sinh^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right)$

15. $\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. 16. $\sin x(\tan^{-1}x)^2$

17. $\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$. 18. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$

19. $\tan^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$ 20. $\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}$

3·8 மடக்கை எடுத்து வகைக் கெழு காணும் முறை (Logarithmic differentiation):

மடக்கை எடுத்துப் பின்னர் வகைக் கெழு காணும் முறையைக் கீழ்க்கண்ட பொழுது கையாள வேண்டிவரும்.

(1) சார்பொன்றில் சில பல சினைகள் அடங்கப் பெற்றும், அச்சினைகள் வெவ்வேறு படிகளுக்கு உயர்த்தப்பட்டிருக்கும் பொழுதும், அவை பின்ன ருபத்தில் அமைந்திருக்கும் பொழுதும் மடக்கை எடுத்து வகைக் கெழு காணுவதன் அவசியம் ஏற்படுகிறது.

(2) சார்புகள் உயர்த்தப்பட்ட படி எண்ணுக இல்லாமல், x ஆகவோ, x ன் சார்பாகவோ அமைந்தால் மடக்கை எடுத்து வகைக் கெழு காணவேண்டும். உதாரணமாக, x^x, $(\sin)^x$ முதலியவைகளின் வகைக் கெழு காண்பதற்கு மடக்கை எடுத்துத்தான் ஆகவேண்டும்.

மாதிரி 1.

வகைக் கெழு காண்க : $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x$

$$y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x$$

இருபக்கங்களிலும் மடக்கை எடுப்பின்

$$\log y = \log \sin x + \log \sin 2x + \log \sin 3x + \log \sin 4x$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 + \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 + \frac{1}{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot 4$$

$$= \cot x + 2 \cot 2x + 3 \cot 3x + 4 \cot 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ [\cot x + 2 \cot 2x + 3 \cot 3x + 4 \cot 4x]$$

$$= \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x\ [\cot x + 2 \cot 2x + 3 \cot 3x + 4 \cot 4x]$$

மாதிரி 2.

வகையிடு : $\dfrac{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{4x^2-7}}$

$$y = \frac{x^4 \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{4x^2-7}}$$

இருபக்கங்களிலும் மடக்கை எடுப்பின்

$$\log y = \log x^4 + \log (x^2+4)^{1/3} - \log (4x^2-7)^{1/2}$$

$$= 4 \log x + \tfrac{1}{3} \log (x^2+4) - \tfrac{1}{2} \log (4x^2-7)$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{4}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4x^2-7} \cdot 8x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{4x^2-7}}\left[\frac{4}{x}+\frac{2x}{3(x^2+4)}-\frac{4x}{4x^2-7}\right]$$

மாதிரி 3.

x ஐப் பொருத்து வகையிடு: $x^x+(\sin x)^x$

$$y = x^x+(\sin x)^x$$

x^x ஐ u என்க, $(\sin x)^x$ ஐ v என்க.

$$u = x^x$$

$$\log u = x\log x$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot 1$$

$$= 1+\log x$$

$$\frac{du}{dx} = u\,(1+\log x) = x^x\,(1+\log x) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$v = (\sin x)^x$$

$$\log v = x\log(\sin x)$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\log\sin x\cdot 1$$

$$= x\cot x+\log\sin x$$

$$\frac{dv}{dx} = v\,[x\cot x+\log\sin x]$$

$$= (\sin x)^x\,[x\cot x+\log\sin x]$$

ஆகவே, $y = u+v$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$= x^x\,(1+\log x)+(\sin x)^x\,[x\cot x+\log\sin x]$$

பயிற்சி

அடியிற்காணும் சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காண்க.

1. $\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. 2. $\dfrac{2x}{(1+x^2)^{1/2}\,(1-x^2)^{3/2}}$

3. $\dfrac{x^3\sqrt{2+3x}}{(2+x)\,(1-x)}$. 4. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2\,(x^3-1)}{(2-3x)^5}}$

5. $x^{1/x}$. 6. $(\log x)^x$.

7. $(\tan x)^{\log x}$. 8. 10^{2x}.

9. $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

10. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x \,.\, \cos 4x$.

11. $\sin x \,.\, \log x \,.\, e^x \,.\, (a^2 - x^2)^{2x+3}$.

12. $\dfrac{\sin^n x \,.\, \cos^m x}{e^x}$.

3·9 0. உருமாற்றங்கள் (Transformations).

சில சார்புகளில், இயற்கணித மூலமாகவோ அல்லது கோணகணித மூலமாகவோ, உருமாற்றங்கள் செய்வதால் வகைக் கெழு எளிதில் காணமுடிகிறது.

மாதிரி 1.

வகையிடுக : $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$$y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$

x க்குப் பதிலாகச் சார்பில் $\cos\theta$ ஐப் பிரதியிடுவோம்.

$$\begin{aligned} y &= \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= \cos^{-1}(\cos 3\theta) \\ &= 3\theta \\ &= 3\,.\,\cos^{-1} x \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

மாதிரி 2.

வகையிடு : $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

$$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

சார்பில் x^2 க்குப் பதிலாக $\cos 2\theta$ ஐப் பிரதியிடுவோம்.

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\theta$$

$$y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\right\}2x$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

பயிற்சி 17

அடியிற் காணும் சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காண்க.

1. $\sin^{-1}(3x-4x^3)$.
2. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
3. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.
4. $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
5. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.
6. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{1-2x^2}\right)$.

7. $\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.　　8. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2}}$

9. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.　　10. $\tan-1\,(\sqrt{1+x^2}-x)$

11. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.　　12. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

13. $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

14. $\sqrt{c^2-x^2}+\frac{c}{2}\log\frac{c-\sqrt{c^2-x^2}}{c+\sqrt{c^2+x^2}}$

15. $\tan^{-1}\frac{3a^2x-x^3}{a\,(a^2-3x^2)}$

3·9.1 உட்படு சார்பின் வகைக் கெழு காணுதல் (Differential coefficient of Implicit functions).

சில உட்படு சார்புகளை விடுவித்து $y=f(x)$ என்ற ருபத்தில் எழுதி வகைக் கெழு காணலாம். ஆனால் சில சமயங்களில் இம்முறையில் எழுதுவது கடினம். ஆகவே $F(x, y) = 0$ என்ற உட்படு சார்பின் வகைக் கெழு காண, ஒவ்வோர் உறுப்பின் வகைக் கெழு கண்டு அதை ஓரினச் சமன்பாடாக அமைவதைக் காணலாம். அதை விடுவித்தால் $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்புக்கிடைக்கும்.

மாதிரி 1.

$x^3+y^3=3axy$ என்ற சமன்பாட்டை வகையிட்டு $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பைக் காண்.

$$x^3+y^3=3axy$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=3a\left[x\frac{dy}{dx}+y\right]$$

$$\frac{dy}{dx}[3y^2 - 3ax] = 3ay - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3ay - 3x^2}{3y^2 - 3ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

மாதிரி 2.

$x^y = e^{x-y}$ என்றால், $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ என்று நிறுவுக.

$$x^y = e^{x-y}.$$

இரு பக்கங்களுக்கும் மடக்கை எடுப்பின்

$$y \log x = (x - y) \log_e e$$

$$y \log x = (x - y) \ldots\ldots \quad (1)$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(1 + \log x) = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x(1+\log x)}$$

$$= \frac{x - \frac{x}{1+\log x}}{x(1+\log x)}$$

$$= \frac{\log x}{(1+\log x)^2}.$$

பயிற்சி 18

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை வகையிட்டு $\frac{dy}{dx}$ன் மதிப்பைக் காண்க.

1. $ax^2+2hxy+by^2=0$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

3. $xy=c^2$

4. $x^m y^n = a^{m+n}$

5. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

6. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}$

7. $27ay^2 = 4(x-2a)^3$

8. $y = x^{x^{x\cdots\infty}}$ எனின், $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y\log x}$ எனக் காண்.

9. $y = \sqrt{[\sin x + \sqrt{\{\sin x + \sqrt{(\sin x + \ldots\ldots \infty}}}$ ஆனல் $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$ எனக் காண்க.

10. $\sin y = x\sin(a+y)$ ஆனல், $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ எனக் காண்க.

3 9·1.1 துணையலகுச் சமன்பாடுகளின் வகைக் கெழு (Differentiation of parametric Equations).

x, y என்ற மாறிகள் வேறொரு அலகின் சார்பாகக் கொடுக்கப்படுவது உண்டு. அவ்வலகை நீக்குங்காலையில் x, y ல் உட்படு சார்பு பெறலாம். பிறகு $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணலாம். துணையலகை நீக்காமலும் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் கீழ்க் கண்ட முறையில் கண்டறியலாம்.

$x = f(t)$, $y = \phi(t)$ எனக் கொள்வோம். t ன் கூடுந் தொகை $\triangle t$ ஆனல், x, y இவற்றின் கூடுந்தொகை முறையே $\triangle x$, $\triangle y$ ஆகட்டும். $\triangle t \to 0$ பொழுது, $\triangle x \to 0$, $\triangle y \to 0$.

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle t}\cdot\frac{\triangle t}{\triangle x}.$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle t} \cdot \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle t}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}.$$

மாதிரி 1.

$x = ct,\ y = \dfrac{c}{t}$ ஆனல் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$x = ct,\ \frac{dx}{dt} = c$$

$$y = \frac{c}{t},\ \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$$

மாதிரி 2.

$$x = a\left(\cos\theta + \log\tan\frac{\theta}{2}\right),\ y = a\sin\theta$$

ஆனல், $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$x = a\left(\cos\theta + \log\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\left(-\sin\theta + \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} . \sec^2\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= a\left(-\sin\theta + \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= a\left(-\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= a\left(\frac{-\sin^2\theta+1}{\sin\theta}\right) = \frac{a\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$y = a\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{\frac{a\cos^2\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

பயிற்சி 19

1. $x = at^2$, $y = 2at$.

2. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$.

3. $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$.

4. $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$.

5. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

6. $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$.

7. $x = a(\cos t + t\sin t)$. $y = a(\sin t - t\cos t)$.

8. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

9. $x = a\sin 2\theta\,(1+\cos 2\theta)$, $y - a\cos 2\theta\,(1 - \cos 2\theta)$.

3·9.2. ஒரு சார்பைப் பொறுத்த மற்ருெரு சார்பின் வகைக் கெழு (Differentiation of one function with respect to another).

$v(x)$ என்ற சார்பைப் பொறுத்த $u(x)$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு காணமுற்படுவோம்.

(அ. து) $\frac{d[(u)(x)]}{d[(v)(x)]} = \frac{d[u(x)]}{dz}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு, $z = v(x)$ ஆகவிருக்கட்டும்.

$$= \frac{d[u(x)]}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$= \frac{d[u(x)]}{dx} \div \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{d[u(x)]}{dx} \div \frac{d[v(x)]}{dx}$$

மாதிரி 1.

$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ஐப் பொறுத்த $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ன் வகைக்கெழு காண்க.

$$u(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$x = \tan\theta$ என்ற பிரதியீட்டால் வலப்பக்கச் சார்பை உருமாற்றம் பெறச் செய்து எளிதில் வகைக்கெழு காணும் முறையைக் கையாளலாம்.

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= 2\theta = 2\tan^{-1}(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

அதேமாதிரி, $v(x) = v = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ என்ற பிரதியீட்டைச் செலுத்துவோம்.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$= 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} \div \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{2}{1+x^2}} = 1$$

பயிற்சி 20

1. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ஐப் பொறுத்த $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ன் வகைக்கெழு காண்க.

2. $\sin^{-1} x$ ஐப் பொறுத்த $e^{\sin^{-1} x}$ ன் வகைக் கெழு காண்க.

3. x^2 ஐப் பொறுத்த $\sqrt{x+1}$ ன் வகைக் கெழு காண்க.

4. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ ஐப் பொறுத்த $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ன் வகைக் கெழு காண்க.

5. $\log(x^2+1)$ ஐப் பொறுத்த $\sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ ன் வகைக் கெழு காண்க.

மீள்பார்வை விஞக்கள்

கீழ்க்காணும் விஞக்களுக்கு x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுக்களைக் காண்க.

1. $\sin^2 3x \cos 5x$.
2. $\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{2}$.
3. $\tan^3\sqrt{1-x^2}$.
4. $e^{\sin^{-1} x} \cdot \cos 5x$.
5. $e^{3x}\cos^3 x$.
6. $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.
7. $\frac{x^3}{\sqrt{2-x}}$.
8. $\frac{e^{\sin x}}{\log x}$.

9. $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$. 10. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\cos x+\sin x}$.

11. $\dfrac{e^{ax}}{\sin(x^n)}$ 12. $\sec^{-1}(2x-3)$.

13. $\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right)$. 14. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$.

15. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$. 16. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

17. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$. 18. $\tan^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{a+x}\right\}$.

19. $\log(\sec x+\tan x)$. 20. $\log\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

21. $\log\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$ 22. $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

23. $\log\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$. 24. $\left(\dfrac{a}{x}\right)^x$

25. $x^{\log x}+(\log x)^x$. 26. $\dfrac{5^x\,.\,(x+2)^3}{(x+3)^2}$.

27. $x^x+\sin(\log x)$. 28. $\{\tan^{-1}(x^2+1)\}^{\sin x}$.

29. $x\log x\,.\,\log(\log x)$. 30. $\log_{10}(x^3+5x)$.

31. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)$.

32. $\tan^{-1}\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}$.

33. $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$ ஆனல் $x\dfrac{dy}{dx}=y$ எனக் காண்.

34. $y=e^{x+3x^2}$ ஆனல், $\dfrac{dy}{dx}=y(1+6x)$ எனக் காண்.

35. $\tan^{-1} x$ என்ற சார்பைப் பொறுத்த $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ என்ற சார்பின் வகைக் கெழு காண்க.

36. $\cos x$ என்ற சார்பைப் பொறுத்த $a^{\sin x}$ என்ற சார்பின் வகைக் கெழு காண்க.

37. $\sin y = x \sin (a+y)$ ஆனால் $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\sin a}{\sin^2 (a+y)}$ என நிரூபி.

38. $(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \sin^{-1}(x-1)$ என்ற சார்பின் வகைக் கெழு காண்க.

39. $\sqrt{c^2-x^2} + \dfrac{c}{2} \log \dfrac{c-\sqrt{c^2-x^2}}{c+\sqrt{c^2-x^2}}$ என்ற சார்பின் x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காண்க.

40. $\tan^{-1} \dfrac{a-x}{1+ax}$ என்ற சார்பின் x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காண்க.

3·9.3 தொடர் வகைக் கெழு காணும் முறைகள் (Methods of finding Successive differential coefficients).

x ஐ மாறியாக அமையப் பெற்றுள்ள சார்பின் வகைக் கெழு x ன் மற்றொரு சார்பாக அமையும். அச்சார்பை கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் 'முதல்' வகைக் கெழு எனக் கொள்ளலாம். இம்முதல் வகைக் கெழுவை மறுமுறை வகையிடலாம். கிடைக்கும் சார்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் 'இரண்டாம்' வகைக் கெழு எனலாம். இம்மாதிரியாகவே தொடர்ந்து வகைக் கெழுக்களைக் காணமுடியும்.

முதல் வகைக் கெழுவை $\dfrac{dy}{dx}$ அல்லது Dy எனவும், இரண்டாம் வகைக் கெழுவை $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ அல்லது D^2y எனவும் குறிப்பிடுவோம். n ஆம் வகைக் கெழுவை, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ அல்லது D^ny எனக் குறிப்பிடலாம்.

சார்பை $y = f(x)$ எனக் குறிப்பிட்டால் வகைக் கெழுக்களை முறையே $y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}$ அல்லது $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ எனக் குறிப்பிடுவோம். அவை முறையே $f'(x), f''(x) \ldots\ldots, f^n(x)$ என்ற மதிப்புகளைப் பெறும்.

அடிக்கடி உபயோகப்படும் சில சார்புகளின் n ஆம் வகைக் கெழு :

1. $y = (ax+b)^m$ எனக் கொள்வோம்.

$$y_1 = m(ax+b)^{m-1} \, . \, a$$
$$y_2 = m(m-1) \, . \, a^2 (ax+b)^{m-2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$y_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) \, . \, a^n \times (ax+b)^{m-n}.$$

2. $y = (ax+b)^{-1}$ ஆனால்

$$y_1 = (-1)(ax+b)^{-2} \, . \, a$$
$$y_2 = (-1)(-2) \, . \, (ax+b)^{-3} \, . \, a^2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

ஆகவே $y_n = (-1)(-2)\ldots(-n) \, . \, (ax+b)^{-n-1} \, . \, a^n$

$$= \frac{(-1)^n \, . \, n! \, . \, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

3. $y = \log(ax+b)$ ஆனால்

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a \, . \, (ax+b)^{-1}$$

y_1 ஐத் தொடர்ந்து $(n-1)$ தடவைகள் வகையிட்டால்,

$$y_n = a \, . \, (-1)^{n-1} \, . \, (n-1)! \, . \, a^{n-1} \, . \, (ax+b)^{-\overline{n-1}-1}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} \, . \, (n-1)! \, . \, a^n}{(ax+b)^n}$$

4. $y = \sin(ax+b)$ ஆனால்

$$y_1 = \cos(ax+b) \, . \, a = a \, . \, \sin\left(\frac{\pi}{2} + ax+b\right)$$

$$y_2 = -\sin(ax+b) \,.\, a^2 = a^2 \sin\left(2 \,.\, \frac{\pi}{2} + ax+b\right)$$

... ...

$$y_n = a^n \,.\, \sin\left(n \,.\, \frac{\pi}{2} + ax+b\right)$$

5. அதேமாதிரி, $y = \cos(ax+b)$ ஆனால்,

$$y_n = a^n \,.\, \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax+b\right)$$

குறிப்பு: (i) $y = \sin x$ ஆனால்

$$D^n y = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

(ii) $y = \cos x$ ஆனால்

$$D^n y = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

6. $y = e^{ax} \sin(bx+c)$ ஆனால்

$$y_1 = e^{ax} \,.\, \cos(bx+c) \,.\, b + \sin(bx+c) \,.\, ae^{ax}$$

$a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ y_1 = e^{ax} \cos(bx+c) \,.\, r\sin\phi + \sin(bx+c) \,.\, e^{ax} \,.\, r\cos\phi$$

$$= e^{ax} \,.\, r\,[\sin\phi \cos(bx+c) + \cos\phi \sin(bx+c)]$$

$$= e^{ax} \,.\, r \,.\, \sin(bx+c+\phi)$$

அதேமாதிரி கணக்கிடுகையில்,

$y_2 = e^{ax} \,.\, r^2 \,.\, \sin(bx+c+2\phi)$ ஆகிறது.

ஆகவே, $y_n = e^{ax} \,.\, r^n \,.\, \sin(bx+c+n\phi)$ ஆகும்.

இங்கு, $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan\phi = \dfrac{b}{a}$ ஆகும்.

7. அதேமாதிரி, $y = e^{ax}\cos(bx+c)$ ஆனால்

$$y_n = e^{ax} \,.\, r^n \cos(bx+c+n\phi)$$

3·9·3.1 n ஆம் தொடர் வகைக்கெழு காணப் பகுதி பின்னங்கள் முறை (n^{th} differential coefficient by method of partial fractions).

மாதிரி 1.

$\dfrac{x^2}{(x+1)^2\,(x+2)}$ வின் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$y = \frac{x^2}{(x+1)^2\,(x+2)}$$

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கையில்

$$\frac{x^2}{(x+1)^2\,(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$x^2 = A\,(x+1)\,(x+2) + B\,(x+2) + C\,(x+1)^2$$

$$A = -3\,; \quad B = 1\,; \quad C = 4.$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x+1)^2\,(x+2)} = \left[\frac{-3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+2}\right]$$

$$D^n\left[\frac{x^2}{(x+1)^2\,(x+2)}\right]$$

$$= \left[-\frac{3\,(-1)^n\,.\,n\,!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n\,.\,(n+1)\,!}{(x+1)^{n+2}} + \frac{4\,(-1)^n\,.\,n\,!}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

மாதிரி 2.

$\cos 2x \sin 3x$ என்ற சார்பின் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$y = \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{2}\,(\sin 5x + \sin x)$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left[5^n\,.\,\sin\left(5x + n\,.\,\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

மாதிரி 3.

$y = \dfrac{1}{x^2+a^2}$ ஆனுல், y_n-இன் மதிப்புக் காண்க.

$$y = \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{x^2 - i^2a^2} = \frac{1}{(x+ia)\,(x-ia)}$$

பகுதி பின்னங்களாக்குகையில்

$$y = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2ai}\left[\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+ai)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]$$

மாதிரி 4.

$\sin^3\theta\cos^5\theta$ இன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$x = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta\,;\; x - \frac{1}{x} = 2i\sin\theta$$

$$2^5\cos^5\theta = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$(2i)^3\sin^3\theta = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$$

$$2^8 \cdot i^3\sin^3\theta\cos^5\theta = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^6 - 3 \cdot x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)$$

$$= \left[\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right) + 2\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) - 2\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) - 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= [2i\sin 8\theta + 2 \cdot (2i\sin 6\theta) - 2 \cdot (2i\sin 4\theta) - 6(2i\sin 2\theta)]$$

$$-2^7 \cdot \sin^3\theta\cos^5\theta = [\sin 8\theta + 2\sin 6\theta - 2\sin 4\theta - 6\sin 2\theta)]$$

$$D^n [\sin^3 \theta \cos^5 \theta] = -\frac{1}{2^7}\left[8^n \sin\left(8\theta + \frac{n\pi}{2}\right) + 2 \, . \, 6^n \sin\left(6\theta + \frac{n\pi}{2}\right) - 2 \, . \, 4^n \sin\left(4\theta + \frac{n\pi}{2}\right) - 6 \, . \, 2^n \sin\left(2\theta + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

3·9·4 வகைக்கெழு அடங்கிய சமன்பாடுகளின் அமைப்பு (Formation of differential Equations).

x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டால், x, y, x ஐப் பொறுத்த y ன் வகைக்கெழு, இவை அடங்கிய ஒரு தொடர்பு பெரும்பாலும் காண முடியும். அந்தத் தொடர்பைத்தான் 'வகைக்கெழு அடங்கிய சமன் பாடு' (Differential Equation) எனச் சொல்வோம்.

மாதிரி 1.

$y = e^{a \sin^{-1} x}$ என்றால் $(1-x^2) y_2 - xy_1 - a^2 y = 0$ என்ற சமன் பாட்டை நிறுவுக.

$$y = e^{a \sin^{-1} x}$$

இருபுறங்களிலும் x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழுகண்டால்

$$y_1 = e^{a \sin^{-1} x} \, . \, \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2} \, . \, y_1 = a \, . \, e^{a \sin^{-1} x} = a \, . \, y \, . \, - \, \ldots\ldots \qquad (1)$$

தொடர்ந்து x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்

$$\sqrt{1-x^2} \, . \, y_2 + y_1 \, . \, \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = a \, . \, y_1 .$$

$$(1-x^2) \, y_2 - xy_1 = ay_1 \, . \, \sqrt{1-x^2}$$

$$= a \, . \, ay \quad ((1) \text{ ன் மூலம்})$$

$$(1-x^2) \, y_2 - xy_1 - a^2 y = 0.$$

3 9·5 லீபினிட்சின் தேற்றம் (Leibnitz's Theorem).

சார்புகளிரண்டின் பெருக்கத்தொகையின் n ஆம் வகைக் கெழு காண இத்தேற்றம் பயன்படுகிறது.

u, v என்பவை x ன் இரு சார்புகளாக இருப்பின்,

$$D^n (uv) = u_n v + uC_1 u_{n-1} v_1 + nC_2 u_{n-2} v_2 + \cdots + nC_r u_{n-r} v_r + \dots + uv_n$$

என்பது தேற்றமாகும்.

உய்த்தறிதல் முறைப்படி தெரிப்பு (Proof by method of Induction).

$$D^n (uv) = u_n v + nC_1 u_{n-1} v_1 + nC_2 u_{n-2} v_2 + \cdots + nC_r \cdot u_{n-r} v_r + \dots + uv_n \quad \text{...... (A)}$$

n ன் மதிப்பு m ஆக இருக்கையில் தேற்றம் உண்மையாக விருக்கட்டும். அப்பொழுது

$$D^m (uv) = u_m v + mC_1 u_{m-1} v_1 + mC_2 u_{m-2} v_2 + \cdots + mc_r u_{m-r} v_r + \dots + uv_m \quad \text{...... (B)}$$

இரு பக்கங்களையும் x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$D^{m+1} (uv) = (u_{m+1} v + u_m v_1) + mC_1 (u_m v_1 + u_{m-1} v_2)$$
$$+ mC_2 (u_{m-1} v_2 + u_{m-2} v_3) + \dots + mC_{r-1} (u_{m-r+2} v_r$$
$$+ u_{m-r+1} v_r) + mC_r (u_{m-r} v_{r+1}) + \cdots$$
$$+ (u_1 v_m + uv^m{}_{+1})$$
$$= u_{m+1} v + u_m v_1 (1 + mC_1) + u_{m-1} v_2 (mC_2 + mC_1)$$
$$+ \dots + u_{m-r+1} v_r (mC_{r-1} + mC_r) + \dots + uv_{m+1}$$

$$mC_{r_1} + mC_r = (m+1) C_r$$
$$mC_1 + mC_2 = (m+1) C_2$$
$$mC_1 + mC_0 = (m+1)_1$$ என்பது தெரிந்ததே.

ஆதலால்,

$$D^{m+1} (uv) = u_{m+1} v + (m+1) C_1 u_m v_1 + (m+1) C_2 u_{m-1} v_2 + \dots + (m+1) C_r u_{m-r+1} v_r + \dots + uv_{n+1} \quad \text{...... (C)}$$

இத்தேற்றம், $n = m$ என்ற மதிப்புக்கு உண்மையாகில், $n = (m + 1)$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாகும். ஏனென்றால் B ஐயும் C ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில் அவை ஒரே உருவத்தைப் பெற்று, m இருக்கிற இடத்தில் $(m+1)$ எழுதப் பெற்றிருக்கிறது. $n = 1$ என்ற மதிப்புக்குத் தேற்றம் உண்மை என்பதைக் கண்டோம். ஆகவே, $n=2$ என்ற மதிப்பிற்கும், அதேமாதிரி $n=3$, ... முதலிய n ன் எல்லா முழுவெண் மதிப்புகளுக்கும் உண்மையெனக் காணலாம்.

மாதிரி 1.

$$y = \frac{\log x}{x^2} \text{ ஆனால்}$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad \text{என்று நிரூபித்து,}$$

லீபினிட்சுத் தேற்றத்தை உபயோகித்து, இதைத் தொடர்ந்து 3 தடவைகள் வகையிடவும்.

$$y = \frac{\log x}{x^2}$$

$$x^2y = \log x \;...... \qquad (1)$$

x ஐப் பொருத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$x^2y_1 + y \,.\, 2x = \frac{1}{x}$$

$$(\text{அ.து}) \quad x^3y_1 + 2x^2y - 1 = 0 \;...... \qquad (2)$$

தொடர்ந்து வகையிட்டால்

$$x^3y_2 + y_1 \,.\, 3x^2 + 2x^2y_1 + y \,.\, 4x = 0$$

$$(\text{அ.து}) \quad x^3y_2 + 5x^2y_1 + 4xy = 0 \;...... \qquad (3)$$

தொடர்ந்து மேலும் வகையிட்டால்

$$x^3y_3 + y_2 \,.\, 3x^2 + 5x^2\, y_2 + y_1 \,.\, 10x + 4x \,.\, y_1 + y \,.\, 4 = 0$$

$$x^3y_3 + 8x^2y_2 + 14xy_1 + 4y = 0 \;...... \qquad (4)$$

$$(3) \text{ ஐ } -\frac{2}{x} \text{ ஆல் பெருக்கினால்}$$

$$-2x^2y_2 - 10xy_1 - 8y = 0 \;...... \qquad (5)$$

(4) + (5) ஐக் கண்டால்

$$x^3y_3 + 6x^2y_2 + 4xy_1 - 4y = 0 \;\ldots\ldots \quad (6)$$

லீபினிட்சுத் தேற்றத்தை உபயோகித்துத் தொடர்ந்து 3 தடவைகள் வகையிட்டால்

$$[x^3y_6+3C_1\,(3x^2)\cdot y_5+3C_2\,(6x)\,y_4+3C_3\,(6)\cdot y_3] + [6x^2\cdot y_5$$
$$+3C_1\,(12x)\,y_4+3C_2\,(12)\cdot y_3] + [4xy_4+3C_1\,(4)\,y_3] - 4y_3 = 0$$

உறுப்புக்களைச் சீராக அமைத்தால்

$$x^3y_6 + 15x^6y_5 + 34y_4 + 50y_3 = 0$$

மாதிரி 2.

$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ஆனால்

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறுவி, அதனை n தடவைகள் தொடர்ந்து வகைக் கெழு கண்டு

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)\,xy_{n+1} + (n^2+1)\,y_n = 0$$

என்று நிறுவுக.

$$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$$

$$y_1 = -a\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} + b\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$$

தொடர்ந்து வகையிட்டால்

$$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - b\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$x^2y_2+xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$$

$$x^2y_2 + xy_1 = -y$$

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

n தடவைகள் தொடர்ந்து லீபினிட்சுத் தேற்றத்தை உபயோகித்து வகையிட்டால்

$$x^2y_{n+2} + nC_1\,(2x)\cdot y_{n+1} + nC_2\,(2)\,y_n +$$
$$xy_{n+1} + nC_1\,(1)\,y_n + y_n = 0$$

(அ.து) $x^2 y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} . 2y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$

(அ.து) $x^2 y_{n+2} + xy_{n+1}(2n+1) + (n^2+1) y_n = 0.$

பயிற்சி 21

கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு n ஆம் வகைக் கெழு காண்க.

1. $\frac{3}{(x+1)(2x-1)}$.
2. $\frac{x^2}{(x-1)^2 (x+2)}$.
3. $\frac{1}{4x^2+8x+3}$.
4. $\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$.
5. $\frac{1}{4x^2-1}$.
6. $\sin^3 x$.
7. $\cos^3 x$.
8. $\sin^7 \theta \cos^5 \theta$.
9. $\cos x \cos 2x \cos 3x$.
10. $\sin x \sin 2x . \sin 3x$.
11. $e^{4x} \sin^2 x$.
12. $y^3 - 3ax^2 + x^3 = 0$ ஆனால் $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$ என்று காண்க.
13. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 + \cos t)$ ஆனால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ t-ன் சார்பாக எழுதுக.
14. $ax^2+2hxy+by^2=1$ ஆனால் $D^2y = \frac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$ எனக் காண்க.
15. $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ ஆனால் $(1-x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$ என்று நிறுவுக.
16. $y = (\sin^{-1} x)^2$ என்றால் $(1-x^2) y_2 - xy_1 - 2 = 0$ என்று நிறுவுக.

17. $x = \sin\theta, \quad y = \sin p\theta$ என்றால்

$$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$$

என்று நிறுவுக.

18. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ என்றால்

$$(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, xy_{n+1} - (n^2+a^2)\, y_n = 0$$

எனக் காண்க.

19. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ என்றால்

$$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n+1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

எனக் காண்க.

20. $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = n \log\left(\frac{x}{n}\right)$ என்றால்

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)\, xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

எனக் காண்க.

21. $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ என்றால்

$$(1+x^2)\, y_{n+2} + (2n+1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

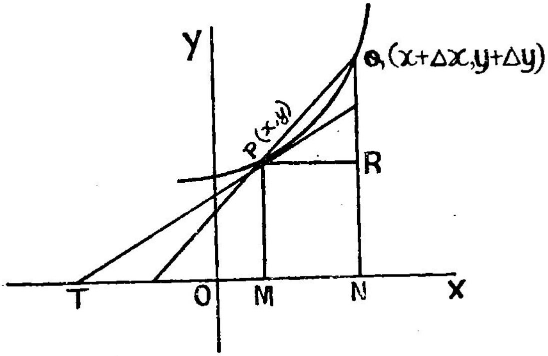
எனக் காண்க.

22. $y = (1-x)^{-\alpha} e^{\alpha x}$ என்றால், $(1-x)\frac{dy}{dx} = \alpha xy$ என்பதை நிறுவி, $(1 - x)\, y_{n+1} - (n + \alpha x)\, y_n - n\alpha y_{n-1} = 0$ என்பதைக் காண்க.

23. $x = \log t,\ y = \frac{(t+t^{-1})}{2}$ ஆனால் $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ என நிரூபி.

4. வகைக் கெழுவின் பொருள்

4·1 வடிவியலில் $\frac{dy}{dx}$ குறிக்கும் பொருள்.



படம் 3

படத்தில் P (x, y) என்பது நிலையான புள்ளி. Q $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ என்பது P ன் அருகாமையிலுள்ள நகரும் புள்ளி. PQ ஒரு நாண். PT என்ற கோடு, வளைவரைக்கு P இல் போடப்பட்ட தொடுவரை (tangent). $\hat{PTX}$ என்ற கோணம் தொடுவரையின் போக்கை (direction)க் குறிக்கும். $y = f(x)$ வளைவரையின் சமன்பாடாக விருக்கட்டும். P, Q விலிருந்து PM, QN என்ற குத்துக்கோடுகள் x ஆயத்துக்கு வரைவோம். P யிலிருந்து PR என்ற குத்துக்கோடு QN க்கு வரைவோம். Q என்ற புள்ளி, P ஐ நெருங்கினால் PQ என்ற நாண், PT என்ற தொடுவரையின் மேல் பதியும்.

$$\text{ஆகவே } P\hat{T}X = \underset{Q \to P}{Lt}\; P\hat{S}X$$

$$= \underset{Q \to P}{Lt}\; Q\hat{P}R$$

$$\tan P\hat{T}X = \underset{Q \to P}{Lt}\; \tan Q\hat{P}R$$

$$= \underset{Q \to P}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

ஆகவே $\frac{dy}{dx}$ என்பது, (x, y) என்ற புள்ளியில் போடப் படும் தொடுவரையின் சாய்வு விகிதம் (gradient) என்ற பொருளை உடையதாகும். இதுதான் வடிவியலில் $\frac{dy}{dx}$ க்குரிய பொருள்.

$\frac{dy}{dx}$ க்கு மற்றொரு பொருளும் நாம் காண முடியும். x மதிப்பு மாறுவதால் y மதிப்பு மாறும். y ன் மதிப்பு எவ்வளவு மாறியுள்ளதோ அதற்கும் x ன் மதிப்பு எவ்வளவு மாறியுள்ளதோ அதற்குமுள்ள விகிதத்தைத்தான் $\frac{dy}{dx}$ குறிக்கும். ஆகவே $\frac{dy}{dx}$ ஐ x, y அளவு மாற்றங்களின் வீதத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம். இதனை மாற்றுவீத அளவை (Rate measurer) எனக் கொள்ளலாம். இப்பொருளைக் கொள்ளும்பொழுது, நாம் கார் முதலான ஓடுபவைகளின் வேகத்தை $\frac{ds}{dt}$ என்றும், வேகமாறு வீதத்தை $\frac{dv}{dt}$ என்றும், கோண மாறு வீதத்தை $\frac{d\theta}{dt}$ என்றெல்லாம் குறிப்பிட முடிகிறது.

4·2 தொடுவரையும், செங்கோடும் (Tangent and Normal)

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாடு வளைவரையைக் குறிக்கட்டும். (x, y) என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடுவரை வரைந்து, அது x ஆயத்தின் மிகைப் போக்குடன் 'θ' என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ எனக் கண்டோம். $\frac{dy}{dx}$, (x, y) புள்ளியிலிருந்து போடப்பட்ட தொடுவரையின் சாய்வு விகிதம் (Slope or gradient of a tangent) எனவும் கண்டோம். வளைவரையின் சமன்பாடும், தொடுவரை வரையப்படும் புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டால், தொடுவரையின் சமன் பாட்டையும், செங்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கணக்கிட முடியும் (Equation to the taagent and normal at the point).

4·2.1. தொடுவரையின் சமன்பாடு.

வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ ஆக இருக்கட்டும். P $(x_1\, y_1)$ என்ற புள்ளி வளைவரையின்மேல் இருக்கட்டும். அப்புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை வரைவோம். தொடுவரையின் சாய்வு விதம் $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}$

ஆகவே, $m = \tan\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}$

தொடுவரையின் சமன்பாடு 'ஆயத்தொலை வடிவகணித' ரீதியாக.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)} (x - x_1) \text{ என்றாகும்.}$$

4·2.2 செங்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation to the Normal).

P $(x_1\, y_1)$ வழியாகத் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோடு 'செங்கோடு' (Normal) எனப்படும்.

தொடுவரையின் சாய்வு விதம் $= m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}$

செங்கோடு தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாதலால்

$$\text{செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம்} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}}$$

ஆகவே, P $(x_1\, y_1)$ வழியாகச் செல்லும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு என்னவென்றால்

$$y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}} \quad (x - x_1)$$

$$(y - y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)} + (x - x_1) = 0$$

4.2·3. குறிப்பு: வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ ஆக விருந்தால்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)} = f'(x_1)$$

ஆதலால், தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1)\, f'(x_1) + (x - x_1) = 0$$

மாதிரி 1.

$ay^2 = x^3$ என்ற வளைவரையின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் போடப்பட்ட செங்கோடு, x, y அச்சுக்களில், ஆதியிலிருந்து சம நீளமுள்ள துண்டுகளை ஏற்படுத்தினால் அப்புள்ளியின் x ஆயத்தைக் காண்க.

அப்புள்ளி $(x_1\ y_1)$ ஆகவிருக்கட்டும். செங்கோட்டின் சமன்பாடு என்னவெனில்

$$(y - y_1)\frac{dy}{dx} + (x - x_1) = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} + x = x_1 + y_1\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{x}{x_1+y_1\dfrac{dy}{dx}}+\frac{y}{\dfrac{x_1+y_1\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}}}=1$$

$$\text{X வெட்டுத்துண்டு} = x_1+y_1\frac{dy}{dx}$$

$$\text{Y வெட்டுத்துண்டு} = \frac{x_1+y_1\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}}$$

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி

$$x_1+y_1\frac{dy}{dx}=\frac{x_1+y_1\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=1$$

$$ay^2 = x^3$$

$$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2ay}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1\,y_1}=\frac{3x_1^2}{2ay_1}$$

$$\therefore \quad \frac{3x_1^2}{2ay_1}=1$$

$$3x_1^2 = 2ay_1$$

$$y_1=\frac{3x_1^2}{2a}$$

(x_1, y_1) வளைவரையில் உள்ளதால்

$$a\,.\left(\frac{3x_1^2}{2a}\right)^2 = x_1^3$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{4a}{9}$$

ஆகவே, அப்புள்ளியின்

$$x \text{ ஆயம்} = \frac{4a}{9}$$

மாதிரி 2.

$y^2 = \dfrac{x^3}{4-x}$ என்ற வளைவரையின் (2, −2) இடத்துத் தொடு வரையின் சமன்பாட்டினையும், செங்கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

$$y^2 = \frac{x^3}{4-x}$$

x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$2y\, y_1 = \frac{(4-x)\,.\,3x^2 - x^3\,(-1)}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 3x^3 + x^3}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y_1 = \frac{12x^2 - 2x^3}{2y\,(4-x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\ -2)} = \frac{48 - 16}{-4\,(4)} = -2$$

தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= -2$

புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $= (2, -2)$

தொடுவரையின் சமன்பாடு என்னவென்றால்

$$y + 2 = -2\,(x-2)$$

$$= -2x + 4$$

$$2x + y - 2 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \frac{1}{2}$

புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $= (2, -2)$.

செங்கோட்டின் சமன்பாடு என்னவென்றால்

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2y + 4 = x - 2$$

$$x - 2y - 6 = 0$$

மாதிரி 3.

$y = be^{-x/a}$ என்ற வளைவரை y ஆயத்தைக் கடக்கும் புள்ளியில் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய நேர்கோடு தொடுகிறது என நிரூபி.

புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண வளைவரைச் சமன்பாடு $y = be^{-x/a}$ ஐயும், y ஆயத்தின் சமன்பாடாகிய $x = 0$ ஐயும் தீர்க்க வேண்டும்.

$$y = be^{-0}$$
$$y = b$$

$\therefore$ புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $= (0, b)$

$$y = be^{-x/a}$$

$$\frac{dy}{dx} = be^{-x/a}\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\, b)} = -\frac{b}{a}$$

தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{b}{a}$

தொடுவரையின் சமன்பாடு என்னவென்றால்

$$y - b = \frac{b}{a}(x - 0)$$

$$ay - ab = -bx$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

அப்புள்ளியில் இச்சமன்பாடு தொடுவரையாக அமைவதால், வளைவரையைத் தொடுகிறது.

மாதிரி 4.

$y = x^3 + x + 1$, $2y = x^3 + 5x$ என்ற இரு வளைவரைகளும் (1, 3) என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகின்றன என்பதையும், தொடு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் பொதுத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டையும் காண்.

$$y = x^3 + x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,3)} = 4$$

$$2y = x^3 + 5x$$

$$\frac{2dy}{dx} = 3x^2 + 5$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,3)} = 4$$

(1, 3) புள்ளியிடத்து $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ன் மதிப்புகள் இரண்டு வளைவரைகளுக்கும் ஒன்ருகவே அமைவதால், அவ்விருவளைவரைகளும் ஒன்றையொன்று அப்புள்ளியில் தொடுகின்றன. பொதுத்தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y - 3 = 4x - 4$$

$$4x - y - 1 = 0$$

மாதிரி 5.

x அச்சுடன் $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ என்ற வளைவரையின் செங்கோடு x ஆயத்துடன் 'ϕ' என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்தினுல், செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi \text{ என நிரூபி.}$$

வளைவரையின் மேல் எந்த ஒரு புள்ளியையும் $x = a \sin^3 \theta$, $y = a \cos^3 \theta$ எனக் குறிக்கலாம்.

$$x = a \sin^3 \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cdot 3 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cdot (-3) \cos^2 \theta \cdot \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta$$

தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= -\cot \theta$

செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \tan \theta$

செங்கோடு x ஆயத்துடன் 'ϕ' என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்துவதால், $\theta = \phi$ ஆகும்.

செங்கோட்டின் சமன்பாடு என்னவென்ருல்,

$$y - a \cos^3 \phi = \tan \phi \, (x - a \sin^3 \phi)$$

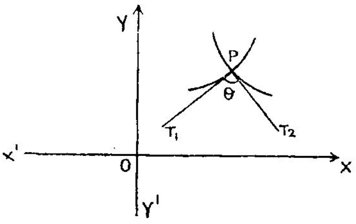
$$y - a \cos^3 \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} (x - a \sin^3 \phi)$$

$$\begin{aligned} y \cos \phi - x \sin \phi &= a (\cos^4 \phi - \sin^4 \phi) \\ &= a (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &= a \cos 2\phi \end{aligned}$$

4·3 இரண்டு வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும்பொழுது இடைப்பட்ட கோணம் (Angle of Intersection between two curves).

இரண்டு வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளை வரைந்தால், அத்தொடு வரைகளுக்குள்

இடைப்பட்ட கோணத்தை 'வளைவரை வெட்டும் கோணம்' எனச் சொல்வோம்.



படம் 4

P என்ற புள்ளி வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளி. PT_1, PT_2 என்ற கோடுகள் Pல் போடப்பட்ட தொடுவரைகள். 'θ' என்ற கோணம், தொடுவரைகளுக்குள் இடைப்பட்ட கோணம். தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ என்ற முறையில் அமையப்பெறலாம். அப்பொழுது, m_1, m_2 தொடுவரைகளின் சாய்வு வீதம் (gradient) ஆகின்றன. இவைகளின் மதிப்பைக் கொண்டு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணலாம்.

$$\tan\theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2} \text{ அல்லது } \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

இங்கு, தொடுவரையின் சமன்பாடுகள் தெரியா. ஆனால் m_1, m_2 என்பவை, வெட்டும் புள்ளியிடத்து $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ன் மதிப்புகள் ஆவன.

4.3·1 பி. குறிப்பு: $m_1m_2 = -1$ ஆனல், வளைவரைகள் செங்கோணத்தில் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன.

மாதிரி 1.

$x^2 + y^2 = 8$, $x^2 = 2y$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டும் கோணத்தைக் காண்க.

வெட்டும் புள்ளியைக்காண இரண்டு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$y^2 - 2y + 8 = 0$$

$$(y+4)(y-2) = 0$$

$$y = -4 \text{ அல்லது } 2$$

பிரதியிடுகையில், $x = \pm\sqrt{-8}$ அல்லது ± 2

வெட்டும் புள்ளிகள் = (2, 2) அல்லது (2, −2)

$x^2+y^2 = 8$ என்ற வளைவரைக்கு, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{y}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,2)} = -1$$

$x^2 = 2y$ என்ற வளைவரைக்கு, $\frac{dy}{dx} = x$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,2)} = 2$$

$$\therefore \quad m_1 = -1\ ;\ m_2 = 2$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right| = 3\ ; \qquad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(3)$$

மாதிரி 2:

$x^3+y^3+x+2y=0$, $xy+2x=y$ என்ற இரண்டு வளைவரைகளும் ஒன்றை ஒன்று ஆதியில் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன என்று நிருபி.

$$x^3+y^3+x+2y=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\,0)} = -\left[\frac{1+3x^2}{2+3x^2}\right]_{(0,\,0)} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$xy+2x=y$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\,0)} = \left[\frac{2+y}{1+x}\right]_{(0,\,0)} = 2$$

$$\therefore \quad m_2 = 2$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$$

வளைவரைகள் ஆதிப்புள்ளியிடத்துச் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

பயிற்சி 22

பின்வரும் வளைவரைகள்தோறும் காட்டிய புள்ளி இடத்து, தொடுவரை, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

1. (i) $y = 6 + x - x^2$, $(2, 4)$ ல்

   (ii) $x^2 + 5y^2 = 14$, $(3, 1)$ ல்

   (iii) $y^2 = 4ax$, $(at^2, 2at)$ ல்

   (iv) $x^2 + y^2 = a^2$, $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ ல்

   (v) $xy = c^2$, $\left(ct, \dfrac{c}{t}\right)$ ல்

   (vi) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ ல்

2. $(2, 4)$ புள்ளியிடத்து $y = \dfrac{6x}{x^2 - 1}$ என்ற வளைவரைக்குத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. (a, b) என்ற புள்ளியிடத்து $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2$ என்ற வளைவரைக்கு, தொடுவரையின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$ என நிரூபி.

4. $y^3 = x^2(2a - x)$ என்ற வளைவரைக்கு எப்புள்ளியிலிருந்து போடப்படும் தொடுவரை x, y அச்சுகளுக்கு ஒரு போகாக அமையும்?

5. $y = 6 + x - x^2$, $y(x - 1) = x + 2$ வளைவரைகள் $(2, 4)$ ல் தொடுவன என்று நிறுவி, இப்புள்ளியிடத்துப் பொதுத் தொடுவரைக்குச் சமன்பாடு காண்க.

6. $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$ வளைவரையின் (1, 1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு யாது? அத்தொடுவரையின் வளைவரையை வெட்டும் வேறு புள்ளி எது? (1, 1) இடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு, $x = 2$ என்ற வரை இம்மூன்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு யாது?

7. $x^3 + y^3 = 3\,axy$ என்ற வளைவரையைப் பரவளையம் $ay = x^2$ வெட்டும் புள்ளிகளிடத்து முதல் வளைவரையின் தொடுவரைகள் x அச்சுக்கு ஒரு போகுக் கோடுகளாகும் என்று நிறுவுக.

8. $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைவரையைப் பரவளையம் $y^2 = ax$ வெட்டும் புள்ளிகளிடத்து முதல் வளைவரையின் தொடுவரைகள் y அச்சிற்கு ஒரு போகுக் கோடுகளாகும் என்று நிறுவுக.

9. $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ என்ற x ஆயத்தொலைகளை அமையப் பெற்ற புள்ளிகளிடத்து $y^2 = x\,(x-1)\,(x-2)$ என்ற வளைவரைக்குப் போடப்படும் தொடுவரைகள் x அச்சிற்கு ஒரு போகாக அமையும் என நிரூபி.

10. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ வளை வரையை $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ என்ற சமன்பாடுடைய கோடு தொடின் $p^n = (a\cos\alpha)^n + (b\sin\alpha)^n$ என நிரூபி.

11. $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

12. $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கொண்ட ஒரு வளைவரையில் 'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. 'θ' '$\theta + \pi$' என்றவற்றின் நேர் நிலையான புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $90°$ என்று நிறுவுக.

13. வளைவரையில் இருக்கும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$; $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$. அவ்

வளைவரையின் ஏதாவது ஒரு புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்று வரும் புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு ஆதிவழிச் செல்லும் என்று நிறுவுக.

14. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. 'θ' இடத்துச் செங்கோடு $(a\theta, 2a)$ வழிச்செல்லும் என்று நிறுவுக.

15. x, y அச்சுக்களுக்கிடையே அடைபட்ட $x = a\cos^3\theta$; $y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைவரையின் தொடுவரைப் பகுதி நீளம் 'a' என்று நிறுவுக.

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ வளைவரையின் தொடுவரை செங்கோடு ஆகிய இவற்றிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் நேர் குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p, q என்றால் $4p^2 + q^2 = a^2$ என நிரூபி.

17. $x^m y^n = a^{m+n}$ வளைவரையில் ஆயங்கள் வெட்டிய தொடுவரைப் பகுதியை நிலைத்த தகவுடைய இருபகுதிகளாகத் தொடுகுற்று (point of contact) பிரிக்கும் என்று நிறுவுக.

18. $x^2 - y^2 = 2a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$ வளைவரைகள் வெட்டுக் கோணத்தைக் காண்க.

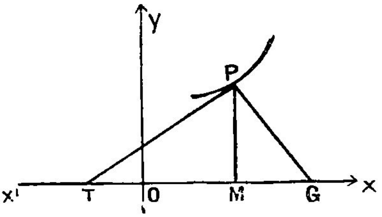
19. $y = x^3$, $6y = 7 - x^2$ வளைவரைகள் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிறுவுக.

20. நீள்வட்டம் $4x^2 + 9y^2 = 72$, அதிபரவளையம் $x^2 - y^2 = 5$ இவ்விரண்டும் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும் என்று நிரூபி.

21. $ax^2 + by^2 = 1$, $Ax^2 + By^2 = 1$ என்ற கூம்புவெட்டிகள் செங்கோணமாக வெட்டின்

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$ என்று நிறுவுக.

4·4 தொடு கோட்டடி (subtangent). வரை கோட்டடி (subnormal), தொடுவரை, செங்கோட்டின் நீளம் (Length of the tangent and Normal).



படம் 5

PT, P ல் போடப்பட்ட தொடுவரை. PG, P வழியாகச் செல்லும் செங்கோடு. PM, P லிருந்து x அச்சிற்குப் போடப் படும் நேர்குத்துக்கோடு. TM ஐத்தான் தொடு கோட்டடி (subtangent) எனச் சொல்வோம். MG ஐத்தான் வரை கோட்டடி (subnormal) எனச் சொல்வோம். $\angle PTM = \theta$ ஆகவிருக்கட்டும். P ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) ஆக விருக்கட்டும்.

$$\text{தொடு கோட்டடி} = TM = MP.\ \cot\theta = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{y_1}$$

$$\text{வரை கோட்டடி} = MG = MP \tan\theta = y \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot y_1$$

$$\text{தொடு வரையின் நீளம்} = PT = MP \operatorname{cosec}\theta$$

$$= MP\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$= y\sqrt{1+\left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$$

$$= \frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1^2}$$

செங்கோட்டின் நீளம்

$$= PG = MP \sec\theta = MP \cdot \sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$= y\sqrt{1+y_1^2}$$

மாதிரி.

$y = be^{x/a}$ ன் தொடு செங்கோட்டடி மாறுதது என்றும் வரை கோட்டடி $\frac{y^2}{a}$ என்றும் நிறுவுக.

$$y = be^{x/a}$$

$$y_1 = b \cdot e^{x/a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{y}{a}$$

$$\text{தொடு கோட்டடி} = \frac{y}{y_1} = \frac{y}{\frac{y}{a}} = a$$

$$\text{வரை கோட்டடி} = y \cdot y_1 = y \cdot \frac{y}{a} = \frac{y^2}{a}$$

பயிற்சி 23

1. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ என்ற வளைவரையில் (a, a) புள்ளியிடத்து ஏற்படும் தொடு கோட்டடி, வரை கோட்டடி, தொடுவரை, செங்கோடு என்றிவற்றைக் காண்க.

2. $y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்ற கயிற்று வளையில் (catenary) (1) செங்கோட்டின் நீளம் $\frac{y^2}{c}$ என்றும், (2) குத்துக்கோட்டின் அடியிலிருந்து (foot of the ordinate) தொடு வரையின் தூரத்தின் நீளம் மாறுதது என்றும் நிறுவுக.

3. $y = a^x$ ன் தொடு கோட்டடி மாறுது என நிரூபி.

4. $by^2 = (x + a)^3$ ன் தொடு கோட்டடியின் இருபடி, வரை கோட்டடிக்குத்தக வேறுபடும் என நிரூபி.

5. $y = be^{-x/a}$ ன் தொடு கோட்டடி x ஆயத்தொலையின் இருபடிக்குத்தக வேறுபடும் என நிறுவுக.

6. $x^m \cdot y^n = a^{m+n}$ வளைவரையில் தொடு கோட்டடி x ஆயத்தொலைக்குத்தக வேறுபடும் என நிரூபி.

7. $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துத் தொடு கோட்டடி, வரை கோட்டடி, தொடுவரை செங்கோடு இவைகளின் நீளங்களைக் காண்க.

8. $x = a(\cos t - t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$ வளைவரையில், 't' இடத்துத் தொடு கோட்டடி, வரை கோட்டடி, தொடுவரை, செங்கோடு இவைகளின் நீளங்களைக் காண்க.

9. $x = a(\theta + \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துத் தொடு கோட்டடி, வரை கோட்டடி தொடு வரை, செங்கோடு இவற்றின் நீளங்களைக் காண்க.

10. $y = a\log(a^2 - x^2)$ வளைவரையில், தொடுவரை தொடு கோட்டடி என்றிரண்டின் கூட்டுத்தொகை ஆயத்தொலைகளின் பெருக்கத் தொகைக்குத்தக வேறுபடும் என நிரூபி.

4·5. மாறிகளின் மாறுவீதம் (Rate of change of variables).

மாறிகளின் மாறுவீதத்தினை வகைக் கெழுவால் அளக்கலாம் எனக் கண்டோம்.

மாதிரி 1.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் நொடிக்கு 4 அங்குலம் வீதம் கூடுகிறது. ஆரத்தின் மதிப்பு 10 அங்குலமாயின் வட்டத்தின் பரப்பு எவ்விதத்தில் கூடும் ?

நேரம் 't' நொடியாக விருக்கும் பொழுது, ஆரம், பரப்பு முறையே r, A எனக் கொள்வோம்.

$$A = \pi r^2$$

t ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$\frac{dr}{dt} = 4''$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

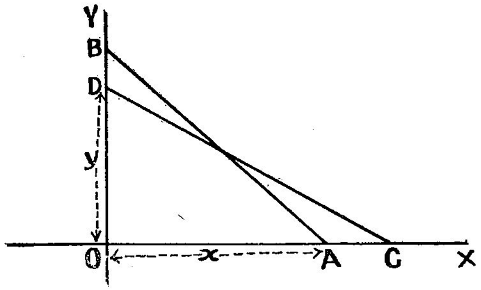
$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=10} = 2\pi \times 10 \times 4$$

$$= 80\pi \text{ ச.அங்குலம்.}$$

பரப்பின் மாறுவீதம் $= 80\pi$ ச. அ.

மாதிரி 2.

20 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி சுவர்மேல் சார்த்தப் பட்டிருக்கிறது. அதன் அடிப்பாகம் நழுவிச் சுவருக்கு 16 அடிக்கு அப்பால் இருக்கையில் ஏணியின் மேற்பாகத்தின் வேகம் $= \frac{4}{3} \times$ அடிப்பாகத்தின் வேகம் என நிறுவுக.



படம் 6

ஏணியின் மேற்பாகம் y அச்சின் மேலும், அடிப்பாகம் x அச்சின் மேலும் படியட்டும். நேரம் 't' நொடியாகவிருக்கையில் ஏணியின் அடிப்பாகம் ஆதியிலிருந்து x' தொலைவிலும், ஏணியின் மேற்பாகம் y' தொலைவிலும் இருக்கட்டும். ஆகவே

$$x^2 + y^2 = 400.$$

t ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$x = 16'$ ஆக இருக்கையில், $y = 12'$ ஆகும்.

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\substack{x=16\\y=12}} = -\frac{16}{12} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

குறைக் குறி (–) ஏன் வருகிறது என்ருல் ஏணியில் மேற் பாகம் நழுவும் திசை y ஆயத்தொலே குறையும் திசையில் (B, O ஐ நெருங்குகிறது) நகருகிறது.

பயிற்சி 24

1. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் நொடிக்கு 2 அங்குலம் வீதம் கூடுகிறது. ஆரத்தின் மதிப்பு 20″ ஆயின் வட்டத்தின் பரப்பு எவ்வீதத்தில் கூடும்?

2. கோளவடிவான ஒரு பலூனில் நொடிக்கு 10 கன அங்குலம் வீதம் காற்று அடைத்துக் கொண்டே இருப்பின் அதன் ஆரம் 15 அங்குலம் ஆகுங்கால் ஆரம் எவ்வீதத்தில் கூடும்?

3. கூம்பு வடிவான ஒரு பாத்திரத்தின் உயரம் 10 அங்குலம். ஆரம் 5 அங்குலம். நிமிடத்திற்கு $1\frac{1}{2}$ கன அங்குல வீதம் அதனுள் தண்ணீர் நிரப்பப்படுகிறது. தண்ணீர் மட்டம் 4 அங்குலத்திற்குக் கீழ் ஆயின் அது எவ்வீதத்தில் உயரும்?

4. ஒரு வட்டக் கூம்பின் ஆரம் நிமிடத்திற்கு 5 அடி வீதம் கூடுவதாகவும், அதன் உயரம் 2 அடி வீதம் குறைவதாகவும் இருப்பின், ஆரம் 15 அடி ஆகவும், உயரம் 24 அடி ஆகவும் இருக்கும் பொழுது அதன் கன அளவு எவ்வீதத்தில் மாறும்.

5. 2 அங்குல ஆரம், 4 அங்குல உயரமுள்ள வட்டக் கூம்பான ஒரு வடிதாள் வழியாக நிமிடத்திற்கு 2·25 க.அ. வீதம் நீர் வடிந்தால் நீர்மட்டம் 3″ குறையும் பொழுது கன அளவு எவ்வீதத்தில் குறையும்?

6. சுவர்மீது சாத்தப்பட்ட 10 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணியின் அடிப்பாகம் நழுவிச்சுவரிலிருந்து 8 அடிக்கப்பால் இருக்கையில் அடியின் வேகம் நொடிக்கு 2 அடி ஆயின், மேற்பாகம் எந்த வேகத்தில் கீழ் இறங்கும்?

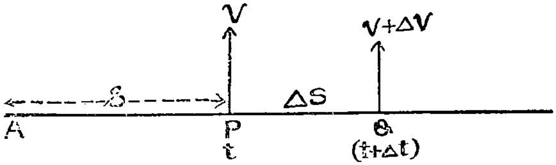
7. 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவன் 15′ உயரத்தில் தொங்கும் ஓர் விளக்கின் நேர் கீழிடத்திலிருந்து 175 அடி வீதம் நடந்து சென்றால், அவனது நிழலின் நீளம் எந்த வீதத்தில் கூடும்?

8. 6 அடி உயரமாகவுள்ள ஒருவன் மணிக்கு 3 மைல் வீதம் 20 அடி உயரமுள்ள ஒரு விளக்குத் தூணிலிருந்து நடந்து 50 அடிக்கப்பால் செல்கையில் அவன்தன் நிழலின் வேகம் என்ன?

9. சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் மணிக்கு 2 அங்குல வீதம் கூடுகின்றது. அதன் பக்கம் 10 அங்குலம் ஆயின் அதன் பரப்பு எந்த வீதத்தில் கூடும்?

10. 12 அங்குல ஆரமுள்ள அரைவட்ட வடிவமுள்ள கிண்ணத்தில் நிமிடத்திற்கு $\frac{3}{4}$ க. அடி தண்ணீர் நிரப்பப்படுகிறது. தண்ணீரின் மட்டம் 8 அங்குல ஆழத்திலிருக்கும் பொழுது, அது எந்த வீதத்தில் கூடுகிறது எனக் காண்க.

4·6. திசைவேகமும், திசைவேக மாறுவீதமும் (Velocity and Acceleration).



படம் 7

A என்பது ஒரு நிலைப் புள்ளி. அதிலிருந்து புறப்பட்ட ஒரு பொருள் 's' தூரத்தை, 't' மணியளவில் கடந்து, v வேகத்தைப் பெற்றிருக்கட்டும். அப்பொருளை இன்னும் குறுகிய காலத்திற்கு ($\triangle t$ மணியளவுக்கு) ஓட்டி, '$\triangle s$' தூரத்தை அந்நேரத்தில் கடக்கும் என்று வைத்துக் கொண்டால் PQ தொலைவு கடக்கும் நேரத்தில் அதன் வேகம் $= \dfrac{\triangle s}{\triangle t}$. Pல் வேகம் தேவையாயின், Q P ஐ நெருங்கும் அவ்வமயம் $\triangle t \to 0$. ஆகவே P ல் வேகம் $= \underset{\triangle t \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\triangle s}{\triangle t}$ ஆனால் P ல் வேகம் 'v' எனக் கொண்டுள்ளோம்.

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$\therefore$ திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt}$

$\therefore$ Q ல் வேகம் $(v + \delta v)$ எனக் கொண்டால், PQ ஐ கடக்கும்பொழுது வேக மாற்றம் $= \triangle v$. கடக்கும் காலம் $= \triangle t$.

சராசரி வேக மாறுவீதம் $= \dfrac{\triangle v}{\triangle t}$

P ல் திசை வேக மாறுவீதம் $= \underset{\triangle \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\triangle v}{\triangle t}$

$$= \frac{dv}{dt}$$

திசை வேக மாறுவீதம் $= \dfrac{dv}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\right]$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}$$

மாதிரி.

ஒரு பொருள் t நொடியில் செல்லும் தூரம் $s = ae^t + be^{-t}$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. அதன் திசை வேக மாறுவீதம் அதன் தூரத்திற்குச் சமம் என்று நிறுவுக.

$$s = ae^t + be^{-t}$$

திசை வேகம் $\dfrac{ds}{dt} = ae^t - be^{-t}$

திசை வேக மாறுவீதம் $= \dfrac{d^2s}{dt^2} = ae^t + be^t = s$

மாதிரி 2.

ஓர் சுழலுருளை t நொடியில் θ^c சுற்றுகிறது. இங்கு $\theta = 72t - 3t^2$ எனின், 8 நொடிக்குப்பின் அதன் கோணமாறு வேகம் யாது?

$$\theta = 72t - 3t^2$$

$$\text{கோணமாறு வேகம்} = \frac{d\theta}{dt} = 72 - 6t$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=8} = 72 - 48 = 24$$

$$= 24 \text{ ஆரையன்.}$$

பயிற்சி 25

1. செங்குத்தாக உயர எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் t நொடிப் பொழுதில் s அடி உயரம் செல்லுமாயின் 2 நொடிக்குப் பின் அதன் திசை வேகமென்ன? அதன் திசை வேக மாறுவீதமென்ன? $s = 80t - 16t^2$ எனக் கொள்க.

2. $\dfrac{dv}{dt} = v \cdot \dfrac{dv}{ds}$ என்று நிறுவுக. $v^2 = s^2 + 4s + 4$ என்றால் புறப்பட்ட இடத்திற்கு 10 அடிக்கப்பால் அதன் திசை வேக மாறுவீதம் என்ன ?

3. ஒரு நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் தூர நேரச் சமன்பாடு $s = t^3 - 9t^2 + 24t - 18$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் திசைவேகம் 't' ன் இருமதிப்புகளுக்குச் சுன்னமாகும் என்று நிருபி. திசை வேகம் சுன்னமாகும்போழ்து, திசை வேக மாறுவீதத்தை காண்க.

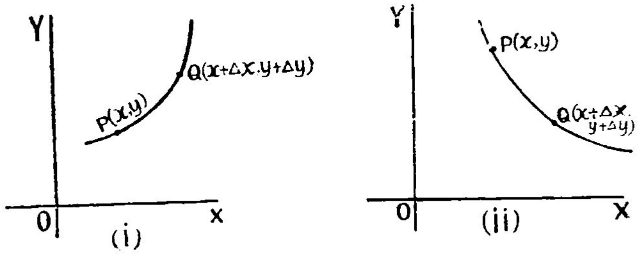
4. நேர்கோட்டில் நகரும் ஒரு பொருள், கடந்த தூரத்தை 's' ஆகவும், கடக்கும் நேரத்தை 't' ஆகவும் வேகத்தை 'v' ஆகவும் பெற்றால், $s = \frac{1}{2}\, vt$ ஆகிறது. திசை வேக மாறுவீதம் மாறிலி எனக் காண்க.

5. நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் வேகம் 'v' ஆகவும், ஆதியிலிருந்து அதன் தூரம் 'x' ஆகவும் இருக்கையில் $a + bv^2 = x^2$ ஆகவிருந்தால், அப்புள்ளியின் திசை வேக மாறுவீதம் $\dfrac{x}{b}$ எனக் காண்க.

5. மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும்

(Maxima and Minima)

5·1 கூடுஞ் சார்பும், குறையுஞ் சார்பும் (Increasing and Decreasing Functions).



படம் 8

படம் (i) ஒரு கூடுஞ் சார்பின் வளைவரை. இதில் P (x, y) என்ற ஒரு புள்ளிக்கு அண்மையில் வளைவரையின் மேல் Q $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ எடுத்துக்கொள்ளப் பட்டுள்ளது. இங்கு Δx, Δy இவ்விரண்டும் மிகை எண்கள். x ன் மதிப்புக் கூடக் கூட, y ன் மதிப்பும் கூடுகிறது. ஆகவேதான் Δx, Δy இவ்விரண்டும் மிகை எண்கள். $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பது மிகைத்தகவு.

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{மிகை மதிப்பு}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \text{மிகை மதிப்பு}$$

ஆகவே, $y = f(x)$ ல், $f(x)$ கூடுஞ் சார்பானல் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ன் மதிப்பு அவ்விடத்தில் மிகை மதிப்பைப் பெறும்.

படம் (ii) ஒரு குறையுஞ் சார்பின் வளைவரை. இங்கு $\triangle x$ ன் மதிப்பு மிகையாகையில், $\triangle y$ ன் மதிப்புக் குறைகிறது. $\triangle x$, $+$ve ஆகும்பொழுது $\triangle y$, $-$ve ஆகிறது.

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -$$

$$\operatorname*{Lt}_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = -$$

(அ.து) $\frac{dy}{dx} = -$ (குறை மதிப்பைப் பெறும்). ஆகவே, $y = f(x)$ ல், $f(x)$ குறையுஞ் சார்பானல் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ன் மதிப்பு அவ்விடத்தில், குறை மதிப்பைப்பெறும்.

மாதிரி.

x ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ குறையுஞ் சார்பாகும்.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 6(x-2)(x-1)$$

x ன் மதிப்பு 1-க்கும் 2-க்கும் இடையே அமையுமானல் $(x-2)(x-1)$ குறைக்கணியமாகும். ஆகவே $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பு $-$ve ஆகும். ஆகவே x ன் மதிப்பு 1 க்கும் 2 க்கும் இடையில் இருக்கும் பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு குறையுஞ்சார்பு ஆகும்.

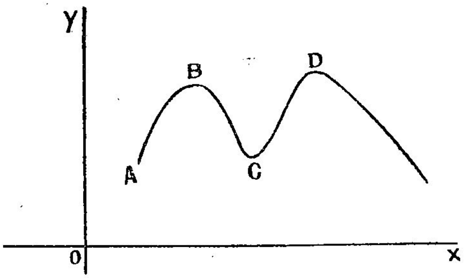
5·2. மீப்பெரு மதிப்பும் மீச்சிறு மதிப்பும் :

$y = f(x)$ என்பது தொடருடைச் சார்பாகவிருக்கட்டும். $x=a$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ ன் மதிப்பு $f(a)$ ஆகும். இப் புள்ளிக்கு அக்கம் பக்கத்திலுள்ள இருபுள்ளிகளில் சார்பின் மதிப்பைக் காண்போம். அதாவது $x=a-h$, $x=a+h$, என்ற புள்ளிகளில் சார்பின் மதிப்பு $f(a-h)$, $f(a+h)$ ஆகிறது. $f(a)$ ஆனது, $f(a-h)$, $f(a+h)$ இவ்விரண்டைவிடப் பெரிய தாயின் $f(x)$, $x=a$ என்ற புள்ளியில் மீப்பெறு மதிப்பைப் பெறுகிறது எனச் சொல்கிறோம்.

$f(a)$ ஆனது, $f(a-h)$, $f(a+h)$ இவ்விரண்டை விடச் சிறியதானல், $f(x)$, $x=a$ என்ற புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது எனச் சொல்வோம்.

5.·2.1 தேற்றம் : (i) $f(x)$, $x = a$ என்ற இடத்தில் மீப் பெறு மதிப்பைப் பெற்ருல், $f'(a) = 0$ ஆகவும், $f''(a) < 0$ ஆகவும் இருக்கும்.

(ii) $f(x)$, $x=a$ என்ற இடத்தில் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற்ருல், $f'(a) = 0$ ஆகவும் $f''(a) > 0$ ஆகவும் இருக்கும்.



படம் 9

(i) $y=f(x)$ படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையின் சமன்பாடாக விருக்கட்டும். B என்ற புள்ளி $x = a$ ஆக விருக்கட்டும். இப்புள்ளியில் y ன் மதிப்பு B க்கு இப்பக்கத் திலும், அப்பக்கத்திலுமுள்ள y ன் மதிப்பை விடப் பெரியது. ஆகவே, B புள்ளியில் சார்பு மீப்பெறு மதிப்பைப் பெறும்.

வளைவரையில், AB பகுதியில், உள்ள புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலை மதிப்புக் கூடக்கூட, y ஆயத்தொலை மதிப்பும்

கூடுகிறது. AB பகுதியில் சார்பு கூடுஞ் சார்பாகிறது. இங்கு $\frac{dy}{dx} = +ve$ ஆகிறது. BC என்ற பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளில், x ஆயத்தொலை கூடக்கூட, y ஆயத்தொலை குறைகின்றது. இப்பகுதியில் சார்பு குறையுஞ் சார்பாக மாறி யுள்ளது. இங்கு $\frac{dy}{dx} = -$. $\frac{dy}{dx}$ ன் குறி B வழியாகச் செல்லு கையில், $+$ லிருந்து $-$ ஆக மாறுகிறது. ஆகவே B ல் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகத்தான் இருக்கவேண்டும் [அல்லது B ல் வளைவரைக்குப் போடும் தொடுவரை x ஆயத்திற்கு ஒரு போகாகவிருக்கும். $\therefore \frac{dy}{dx} = 0$]. அதே மாதிரியாக, C வழியாகச் செல்லுகையில் $\frac{dy}{dx}$ ன் குறி $-$ லிருந்து $+$ ஆக மாறுகிறது. C ல் $\frac{dy}{dx} = 0$. ஆகவே, B, C முதலிய புள்ளிகளைத் திரும்பும் புள்ளிகள் (Turning points) எனச் சொல்கிறோம்.

$\frac{dy}{dx}$, y ன் வகைக்கெழு. அதுவும் x ன் சார்பாகத்தான் அமையும். அஃது AB பகுதியில் $+$ ஆகவிருந்து, B க்கு வரும்பொழுது 0 ஆக மாறிற்று. அதன் மதிப்பு குறைந்து சுன்னமாயிற்று. $\frac{dy}{dx}$ என்ற சார்பு குறையுஞ் சார்பாகும். அதன் வகைக் கெழு, அதாவது, $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$, $-$ ஆகும். ஆகவே, B என்ற இடத்தில், $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -$ ஆகிறது. B இடத்துத் தான் சார்பு மீப்பெறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, $y = f(x)$ என்பது சார்பாகி, B, $x = a$ ஆனுல்,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = 0 \text{ ஆகும்.} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} = f''(a) = - \text{ ஆகும்.}$$

இதே மாதிரியாக, $x = a$ என்றவிடத்துச் சார்பு மீச்சிறு மதிப்புப் பெற்ருல், $f'(a) = 0$ ஆகவும், $f''(a) = +$ எனவும் நிறுவலாம்.

5·2·2 குறிப்புகள் : (1) ஒரு சார்புக்கு மீப்பெறு, மீச்சிறு மதிப்புப் பெறும் இடங்கள் மாறிமாறி வருகின்றன.

(2) மீப்பெறு மதிப்பு சார்புக்கே மிகப் பெரிய மதிப்பு அல்ல. குறிப்பிட்ட வீச்சுக்குள் (within a range) மீப்பெறு மதிப்பு சார்பின் மிகப் பெரிய மதிப்பு ஆகும்.

(3) சார்பின் முதல் வகைக்கெழு, திரும்பும் புள்ளிகளின் (turning points) ஆயத் தொலைகளைத் தான் கொடுக்கும். இரண்டாம் வகைக்கெழுதான் மீச்சிறு மதிப்பைத்தரும் இடமா, மீப்பெரு மதிப்பைத் தரும் இடமா என்று புலப் படுத்தும்.

நடைமுறையில் நாம் மீப்பெறு, மீச்சிறு மதிப்பைக் காணக் கையாளவேண்டிய வழிமுறை:

(i) கொடுக்கப்பட்ட சார்பை y எனக் கொள்வோம்.

(ii) $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்போம்.

(iii) $\frac{dy}{dx} = 0$ என்று போட்டு, சமன்பாட்டைத் தீர்ப் போம். x ன் மதிப்புக்கள், திரும்பும் புள்ளிகளின் x மதிப்பு கள் ஆவன.

(iv) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்போம்.

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ல், திரும்பும் புள்ளிகளின் x மதிப்புகளை ஒவ் வொன்றாகப் பிரதியிடுவோம். $\frac{d^2y}{dx^2}$ ன் குறி – ஆனல், அந்த x ன் மதிப்புள்ள புள்ளியிடத்து மீப்பெறு மதிப்பைச் சார்பு பெறும். $\frac{d^2y}{dx^2}$ ன் குறி + ஆனல், அந்த x ன் மதிப்புள்ள புள்ளியிடத்து மீச்சிறு மதிப்பைச் சார்பு பெறும்.

மாதிரி 1.

$(x-1)(x-2)^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெறு, மீச்சிறு மதிப்பு களைக் காண்க.

$$y = (x-1)(x-2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-1) \,.\, 2\,(x-2) + (x-2)^2$$
$$= 2\,(x^2 - 3x + 2) + x^2 - 4x + 4$$
$$= 3x^2 - 10x + 8$$
$$= (x-2)\,(3x-4)$$

$\frac{dy}{dx}$ ஐ சுன்னத்திற்கு ஈடாக்கினால்

$$(x-2)\,(3x-4) = 0$$
$$x = 2,\; x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 10.$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=2} = 12 - 10 = 2 = +$$

$x = 2$ என்ற புள்ளியிடத்து மீச்சிறு மதிப்புப் பெறும்.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4/3} = 8 - 10 = -2 = -$$

$x = \frac{4}{3}$ என்ற புள்ளியிடத்து மீப்பெரு மதிப்புப் பெறும்.

மீப்பெரு மதிப்பு $= \left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2$

$$= \frac{4}{27}$$

மீச்சிறு மதிப்பு $= (2-1)\,(2-2)^2$

$$= 0$$

மாதிரி 2.

இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 10. அவற்றின் இரு படிகளின் கூட்டுத்தொகை மிகக் குறைவாயின், அவ்வெண் கள் யாவை?

அவ்வெண்களை, x, y எனக் கொள்வோம்

$$x + y = 10.$$

அவைகளின், இருபடிகளின் கூட்டுத்தொகை

$$x^2 + y^2$$

$$P = x^2 + y^2 \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$= x^2 + (10 - x)^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 2x + 2\,(10 - x)\,(-1)$$

$$= 2x - 2\,(10 - x)$$

$$= 4x - 20$$

$\frac{dP}{dx} = 0$ என்று ஈடாக்குவோம்.

$$4x - 20 = 0$$

$$x = 5$$

$\frac{d^2P}{dx^2} = 4 =$ எப்பொழுதுமே +

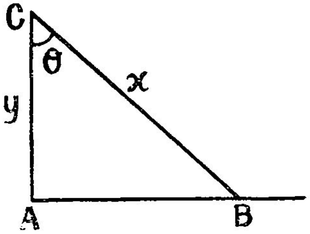
$x = 5$ இடத்து மீச் சிறு மதிப்புப் பெறும்.

$x = 5$ ஆனால், $y = 5$

அவ்வெண்கள் 5, 5 ஆகும்.

மாதிரி 3.

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோண எதிர் சிறைப்பக்கம் (hypotenuse) மற்றொரு பக்கம் ஆகிய இரண்டின் கூட்டுத்தொகை மாறிலி ஆகவிருந்து, பரப்பு மீப்பெறு மதிப்பைக் கொள்ளின், இருபக்கங்களின் இடைப்பட்ட கோணம் 60° என நிறுவுக.



படம் 10

செங்கோண எதிர் சிறைப்பக்கம் x ஆகவும் மற்றொரு பக்கம் y ஆகவும் இருக்கட்டும், $x + y = c$, கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. பக்கம் AB $= \sqrt{x^2 - y^2}$

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$A = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{1}{2} (c - x) \sqrt{x^2 - (c - x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} (c - x) \sqrt{2cx - c^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2} \left[(c - x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2cx - c^2}} 2c + \sqrt{2cx - c^2} (-1) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{c (c - x) - (2cx - c^2)}{\sqrt{2cx - c^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2c^2 - 3cx}{\sqrt{2cx - c^2}} \right]$$

$\frac{dA}{dx} = 0$ க்கு ஈடாக்கினுல்

$$2c^2 - 3cx = 0$$

$$x = \frac{2c}{3}$$

$x = \frac{2c}{3}$ க்கு, குறைவான மதிப்பைப் பெற்ருல் $\frac{dA}{dx} = +$.

$x = \frac{3c}{3}$க்குக் கூடுதலான மதிப்பைப் பெற்ருல் $\frac{dy}{dx} = -$. $x = \frac{2c}{3}$

வழியாகச் செல்லும் பொழுது $\frac{dy}{dx}$ $+$ லிருந்து $-$ ஆக மாறுகிறது.

$\therefore$ $x = \frac{2c}{3}$ இடத்து சார்புக்கு மீப்பெறு மதிப்புக் கிடைக்கும்.

$$x = \frac{2c}{3}; \quad \therefore \quad y = \frac{c}{3}$$

அவ்விரண்டு பக்கங்களிடையே உள்ள கோணத்தை ‘θ’ என்ருல்,

$$\cos\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{c}{3}}{\frac{2c}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

மாதிரி 4.

மீச்சிறு அளவு கூடாரத்துணியில் குறித்த கன அளவை உட்கொண்ட கூம்பு வடிவமுள்ள கூடாரம் அமைத்தால், அதன் உயரம் $\sqrt{2}$ மடங்கு ஆரத்திற்குச் சமமாகும் என நிரூபி.

கூம்புக் கூடாரத்தின் அடித்தளத்தின் ஆரம் x எனவும், உயரம் y எனவும் கொள்வோம்.

$$\text{க. அளவு} = V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

$\frac{1}{3}\pi x^2 y = c$, எனக் கொடுத்துள்ளது.

கூடாரத்துணி ‘ $S = \pi r l$ ’ (l என்பது சாயுயரம்)

$$= \pi x \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \pi x \sqrt{x^2 + \frac{9c^2}{\pi^2 x^4}}$$

$$S = \sqrt{\pi^2 x^4 + \frac{9c^2}{x^2}}$$

$$S^2 = \pi^2 x^4 + \frac{9c^2}{x^2}$$

$$2s\frac{ds}{dx} = \pi^2 \cdot 4x^3 - \frac{18c^2}{x^3}$$

$$= \frac{4\pi^2 x^6 - 18c^2}{x^3}$$

$\frac{ds}{dx} = 0$ க்கு ஈடாக்கினால், $4\pi^2 x^6 - 18c^2 = 0$

$$x^6 = \frac{18c^2}{4\pi^2} = \frac{9c^2}{2\pi^2}$$

$$x^3 = \frac{3c}{\sqrt{2} . \pi}$$

இந்த இடத்து, $\frac{ds}{dx}$ ன் மதிப்பு − லிருந்து + ஆகிறது. x^3 க்கு இம்மதிப்பாகில், சார்பு மீச்சிறு மதிப்புப்பெறும்.

$$y = \frac{3c}{\pi x^2} = \frac{3cx}{\pi x^3} = \frac{3cx}{\pi . \frac{3c}{\sqrt{2} . \pi}}$$

$$y = \sqrt{2} . x$$

உயரம் = $\sqrt{2}$ × அடித்தள ஆரம்.

பயிற்சி 26

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் உளவாயின் அவற்றைக் காண்க.

(i) $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$

(ii) $4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

(iii) $(x - 1)^2 (x + 2)$

(iv) $a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x$

2. கடல் தந்திக்கம்பி கடத்தாப் பொருளினுள் உட்பட்ட செம்புக்கம்பியால் செய்யப்படுவது. செம்புக் கம்பியின் ஆரத்துக்கும், கடத்தாப் பொருளின் கனத்துக்கும் இடைப் பட்ட தகவு x எனின், செய்திகள் செல்லும் வேகம் $x^2 \log \frac{1}{x}$ க்குத் தகுந்தாற்போல் வேறுபடும். $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ என்றிருப்பின் செய்திகள் மிக்க துரிதத்தில் செல்லும் என நிறுவுக.

3. (1) மூடியின்றியோ (2) மூடியுடனே கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உலோகத் தகட்டினல் மிகுந்த கொள்ளளவு அடங்கிய ஓர் உருளை செய்வதற்கு அவ்வுருளையின் வகையளவுகள் (dimensions) யாவை?

4. a, b நீள அகலமுள்ள நீண்ட சதுரத்தகட்டின் மூலை களிலிருந்து ஒரே அளவுள்ள சதுரத்துண்டுகளை வெட்டி யெறிந்தபின், ஓரங்களை மடக்கிச் செய்யப்பட்ட ஒரு நீண்ட சதுரப் பெட்டியின் உயரம் $\frac{1}{6}\left\{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right\}$ ஆக இருக்கையில் அதன் கொள்ளளவு மீப்பெரு மதிப்பாகும் என நிரூபி.

5. குறிப்பிட்ட அளவு தண்ணீர் கொள்ளும் ஓர் தொட்டி யின் செங்குத்தான பக்கங்களையும், சதுர அடிப்பாகத்தையும் குறைவான செலவில் வெள்ளைபூச அதன் உயரம் அகலத் தின் பாதியாக இருத்தல் வேண்டும் என நிரூபி.

6. a நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை இரு துண்டாக்கி ஒன்றினை வட்டவடிவமாகவும், மற்றொன்றைச் சதுர வடிவமாகவும் ஆக்கியபின், அவ்விரு துண்டுகளின் பரப்பின் கூட்டுத் தொகை மிகச் சிறியதாயின், அதன் மதிப்பு $\frac{a^2}{4(\pi+4)}$ என நிறுவுக.

7. மொத்தப் புறப்பரப்பு கொடுக்கப்பட்டு, ஒரு கூம்பின் கன அளவு மீப்பெரு மதிப்பை அடைந்தால் அதன் உச்சிக் கோணத்தின் பாதி $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ என்று நிறுவுக.

8. R ஆரமுள்ள ஒரு கோளத்துள் வரைந்த வட்ட வுருட்டின் கன அளவு மிகக் கூடுதலாயின் அதன் உயரம் $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ என்று நிறுவுக.

அதன் வளைபரப்பு மிகக் கூடுதலாயின் உயரம் $\frac{R}{\sqrt{2}}$ என்று நிறுவுக.

9. h உயரமும், α உச்சிக் கோணப்பாதியும் உடைய கூம்பினுள் வரையப்பட்ட உருளையின் கன அளவின் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan\alpha$ என்று நிறுவுக.

10. ஒரு கூம்பின் மொத்த புறப்பரப்பு 4π ச. அடி. அதன் கொள்ளளவு மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்ருல், கூம்பின் வகை யளவுகள் (dimensions) யாவை ?

11. ஒரு கூம்பு, 'r' ஆரமுள்ள கோளத்தினுள்ளே அமை யப் பெற்றிருக்கிறது. கூம்பின் கன அளவு மீப்பெரு மதிப் பைப் பெற்ருல் அதன் குத்துயரம் $\frac{4r}{3}$ ஆகவிருக்கும் என நிரூபி.

6. பகுப்பு வகைக்கெழு காணும் முறை

(Partial Differentiation)

6·1 நாம் இதுவரை ஒரு மாறி அடங்கிய சார்பைப்பற்றி ஆராய்ந்தோம். ஆனால் சார்புகள் பல மாறிகளை அடங்கியுள்ளவையாகவும் இருக்கலாம். உதாரணமாக வட்டத்தின் பரப்பு அதன் ஆரத்தைப் பொருத்தது. ஆரம் ஒன்றேதான் மாறியாக அமைகிறது. ஆனால் நீண்ட சதுரத்தின் பரப்பு, நீளம், அகலம் இவைகளைப் பொருத்தது. இங்கு இரண்டு மாறிகள் உள்ளன. இம்மாதிரியான சார்புகளை $u = f(x, y)$ எனக் கொள்வோம். x, y தனித்தனியாகவோ, ஒரே சமயத்துச் சேர்ந்தோ மாறலாம். x, y ன் மதிப்புகள் முறையே $x+\triangle x$, $y+\triangle y$ ஆக மாறும்பொழுது u ன் மதிப்பு $f(x+\triangle x, y+\triangle y)$ ஆகிறது. u ன் மதிப்பு மாற்றம் $= f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x, y)$.

x ன் மதிப்பு $x+\triangle x$ ஆக மாறி, y மாருமல் இருந்தால், u மதிப்பு மாற்றம் $= f(x+\triangle x, y) - f(x,y)$.

y ன் மதிப்பு $(y+\triangle y)$ ஆக மாறி, x மாருமல் இருந்தால், u மதிப்பு மாற்றம் $= f(x, y+\triangle y) - f(x, y)$

பகுப்பு வகைக்கெழு (Partial Differential Coefficient).

$u = f(x, y)$ ஆகவிருந்து, x ஆனது $(x+\triangle x)$ ஆகமாறி, y நிலையாகவிருந்தால்

u ல் மாற்றம் $= \triangle u = f(x+\triangle x, y) - f(x, y)$

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x}$$

ஆகவே $\frac{\partial u}{\partial x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x}$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ஐத்தான், x ஐப் பொருத்த பின் பகுப்பு வகைக்கெழு எனச் சொல்வோம்.

அதேமாதிரி, $\frac{\partial u}{\partial y} \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x, y)}{\triangle y}$

6·2 தொடர் பகுப்பு வகைக்கெழுக்கள் (Successive Partial Coefficients).

$u = f(x, y)$ என்றால், x ஐப் பொருத்த u ன் பகுப்பு வகைக் கெழு $\frac{\partial u}{\partial x}$ என்றும், y ஐப் பொருத்த u ன் பகுப்பு வகைக்கெழு $\frac{\partial u}{\partial y}$ என்றும் கண்டோம். இவ்விரண்டிற்கும் x ஐப் பொருத்து பகுப்பு வகைக் கெழு கண்டால் $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ என்றும், $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]$ என்றும் ஆகும். அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என்றும், $\frac{\partial^2 u}{\partial x \,.\, \partial y}$ என்றும் ஆகும். இதேமாதிரி அவ்விரண்டிற்கும் y ஐப் பொருத்த பகுப்பு வகைக்கெழு கண்டால் அவை முறையே $\frac{\partial^2 u}{\partial y \,.\, \partial x}$ என்றும், $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ஆகும் என்றும் காணலாம்.

மாதிரி 1.

$u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ என்றால்

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$ என்று நிறுவுக.

$$u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1\,(3x^2-3yz)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2-3zx}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3\,(x^2+y^2+z^2-yx-zx-xy)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$= \frac{3\,(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)}{(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)}$$

$$= \frac{3}{x+y+z}$$

மாதிரி 2.

$u = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ஆனல் $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$ என நிறுவுக.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2}}\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}}\left[\frac{\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{x}\,.\,\sqrt{y}}}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{1}{2x\,.\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{4\sqrt{x}\,.\,\sqrt{y}}}\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\right]$$

$$= \frac{-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}{\sqrt{4\sqrt{x}\,.\,\sqrt{y}}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{-1}{2y\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} - \frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

மாதிரி 3.

$u = \log(x^2+y^2+z^2)$ என்றால்

$$x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z} = y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial x} = z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$$ என நிரூபி.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1\,(2x)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \cdot 2y$$

$$= -\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial z} = -\frac{1\,(2x)\,(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= -\frac{4zx}{(x^2+y^2+z^3)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z} = -\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^3+z^2)^2}$$

$$y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial x} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

பயிற்சி 27

1. பின் வருவனவற்றுள் $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ காண்க.

(i) $u = \tan(ax + by)$

(ii) $u = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(iii) $u = \tan^{-1}\frac{x^2 + y^2}{x + y}$

2. $u = (y - z)(z - x)(x - y)$ என்றால்

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ என்று நிரூபி.

3. $u = \log(\tan x + \tan y + \tan z)$ ஆனால்

$\sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 2$ என்று நிரூபி.

4. $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ என்றால்

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிரூபி.

5. $u = \sin^{-1}.\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ என்றால்

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$ என நிரூபி.

6. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x - y}{x + y}\right)^{3/2}$ ஆனால்

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x} . \frac{\partial u}{\partial y}$ என நிரூபி.

7. $z = f(x^2 + y^2)$ ஆனால் $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ என நிரூபி.

8. $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ ஆனால், $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $u = \sin^{-1} \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ஆனல் $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \tan u$ எனக் காண்க.

10. $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ ஆனல்

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$$ என நிருபி.

11. $r^2 = x^2 + y^2$ ஆனல்,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right\}$$ எனக் காண்.

12. $u = \tan^{-1} \left(\dfrac{y}{x}\right)$ ஆனல்

(i) $$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \, . \, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \, . \, \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, . \, \partial z}$$

(ii) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ எனக் காண்.

13. $u = x^2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \dfrac{x}{y}$ ஆனல்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, . \, \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$ எனக் காண்.

14. $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$ ஆனல்

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ என நிருபி.

15. $x^x y^y z^z = c$, ஆனல், $x = y = z$ ஆகவிருக்கும் பொழுது

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, . \, \partial y} = -(\log ex)^{-1}$$ எனக் காண்.

7. பிழைகளும், தோராயங்களும்

(Errors and approximations)

7·1. x ஐ அளக்கும் பொழுது ஏற்படும் பிழையை δx (அல்லது $\triangle x$) எனக் குறிப்போம். δx ஐ தனிப்பிழை (absolute error) எனவும், $\frac{\delta x}{x}$ ஐ சார்பிழை (Relative Error), $\frac{\delta x}{x} \times 100$ ஐ நூற்று வீதப் பிழை (Percentage error) என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$$

$\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + t.$ இங்கு t மிகச்சிறிய எண்ணாகும்.

$$\delta y = f'(x)\ \delta x + t\ .\ \delta x.$$

'$t\ \delta x$' மிகச்சிறியதாதலால், அதை விட்டுவிடலாம்.

$\delta y = f'(x)\ \delta x.$ (தோராயமாக).

மாதிரி 1.

ஒரு கப்பலை 't' நேரத்தில், 'S' தூரம் செல்லுகையில், D இடமாற்றம் பெறச் செலுத்தப்படும் வேலைத்திறன்

$\frac{S^2 D^{3/2}}{t^2}$ க்குத் தக வேறுபடுகிறது. தூரத்தை 1% மிகைப்படுத்தி, நேரத்தை 1% குறைத்து, இடமாற்றத்தை 3% குறைத்தால், வேலைத்திறனில் மிகைப்படுத்த வேண்டியதை நூற்று வீதத்தில் காண்க.

வேலைத்திறனை W என்றால்

$$W \propto \frac{S^2 D^{3/2}}{t^2}$$

$$W = \frac{K \cdot S^2 D^{3/2}}{t^2}$$

இருபக்கங்களிலும் மடக்கை எடுத்தால்

$$\log W = \log K + 2 \log S + \frac{3}{2} \log D - 2 \log t$$

பிழைச் சார்பு என்னவெனில்

$$\frac{\triangle W}{W} = 2 \cdot \frac{\triangle S}{S} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\triangle D}{D} - 2 \frac{\triangle t}{t}$$

$$\frac{\triangle W}{W} \times 100 = 2 \cdot \frac{\triangle S}{S} \times 100 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\triangle D}{D} \times 100 - \frac{2\triangle t}{t} \times 100$$

$$= 2 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{13}{2} = 6 \frac{1}{2}\%.$$

மாதிரி 2.

முக்கோணம் ABC ஐச் சிறிது மாற்றி ஒரே வட்டத்தில் வரைந்திருப்பின் $\frac{\delta a}{\cos A} + \frac{\delta b}{\cos B} + \frac{\delta c}{\cos C} = 0$ என நிரூபி.

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ என்பது தெரிந்ததே.}$$

$$a = 2R \sin A.$$

பிழைச் சமன்பாடு யாதெனில்

$$\delta a = 2R \, . \cos A \, . \, \delta A$$

$$\frac{\delta a}{\cos A} = 2R \, . \, \delta A$$

அதேமாதிரி $\dfrac{\delta b}{\cos B} = 2R \, \delta B$

$$\frac{\delta c}{\cos C} = 2R \, \delta C$$

$$\frac{\delta a}{\cos A} + \frac{\delta b}{\cos B} + \frac{\delta c}{\cos C}$$

$$= 2R \, (\delta A + \delta B + \delta C)$$

$$= 2R \, \delta \, (A + B + C)$$

$$= 2R \, \delta \, (\pi) = 0$$

பயிற்சி 28

1. l நீளமுள்ள ஓர் ஊசலி, ஊசல் ஆட ஆகுங்காலம் $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. இங்கு '$g$' புவிக் கவர்ச்சியாகும். l ல் ஏற்படும் பிழை 2 நூற்று வீதம் எனின், T ல் ஏற்படும் பிழை என்ன ?

2. ஒரு வாயுவின் அமுக்கம் p, பருமம் v. இவற்றின் தொடர்பு $p.v^{1 \cdot 4} = c$ (நிலை எண்). பருமம் $\dfrac{1}{2}$ நூற்று வீதம் குறைந்தால் p எவ்வளவு நூற்று வீதம் கூடும்?

3. மின்னோட்டத்தின் அளவை மின்னோட்ட மானியால் அளக்கும் பொழுது ஒதுக்கக் கோணத்தின் (angle of deflection) இருக்கைக்குத் (tangent) தக இருக்கும். 45° ஒதுக்கக் கோணத்தை அளக்கையில் ஏற்பட்ட பிழை ஒரு நூற்றுவீதம் எனின், மின்னோட்ட அளவில் வரும் பிழை தோராயமாக $\dfrac{\pi}{2}$ எனக் காண்பி.

4. முக்கோணம் ABC ல் அளக்கப்பட்ட A கோணத்தின் அளவு = 63°. அதன் பரப்பு $\frac{1}{2}bc \sin A$ என்ற வாய்பாட்டால் குறிக்கப்படும். A ன் அளவில் 15 கலை (minutes) பிழை எனின் பரப்பில் வரும் நூற்று வீதப்பிழை என்ன?

5. ஒரு கம்பியின் விறைப்பு (rigidity) $N = \frac{8\pi Il}{t^2 r^4}$ என்ற வாய்பாட்டால் பெறப்படும். l, 2 நூற்று வீதம் குறைந்தும், r, 2 நூற்று வீதம், t, 1·5 நூற்று வீதம் கூடியும் இருப்பின் தோராயமாக 13 நூற்று வீதம் N குறையும் எனக் காட்டுக.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் கோணங்கள் A, C, பக்கம் 'a' என்றிவற்றால் அளக்கையில் வந்த பிழை δA எனில், பரப்பில் வரும் நூற்று வீதப்பிழை

$$\frac{100 \sin C \delta A}{\sin A \,.\, \sin (A + C)}$$ என நிறுவுக.

7. ஓர் ஆடியின் (mirror) குவியத்தொலையை (focal length), $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{2}{f}$ என்ற வாய்பாட்டால் அறியக்கூடும். u, v என்பவற்றைக் காண்கையில் ஒவ்வொன்றிலும் பிழை K ஏற்படின், f ல் ஏற்படும் சார்பிழை $\frac{\delta f}{f} = K\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u}\right)$ என்று நிறுவுக.

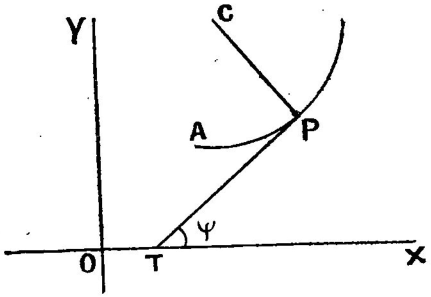
8. $\alpha°$ சாய்வாக v வேகத்தோடு எறிந்த ஒரு கல் போகும் தொலை R, $R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ என்ற வாய்பாட்டால் கணக்கிடப்படும். சாய்வு, வேகம் என்றவற்றின் பிழைகள் முறையே 1, $\frac{1}{2}$ நூற்றுவீதம் ஆயின், R ல் வரும் நூற்றுவீதப் பிழை என்ன?

9. ஒரு நீள் வட்டத்தின் பாதி அச்சுகளான a, b ல் பிழை ஏற்படுவதன் காரணமாக அதன் பரப்பு S ல் ஏற்படும்

பிழையை $\frac{\delta s}{s} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$ என்ற சமன்பாட்டால் அறியலாம் என நிறுவுக.

10. முக்கோணம் ABC ன் பரப்பு $\triangle$. அதன் பக்கம் a, கோணங்கள் B, C என்பவற்றால் கணக்கிடப்படுகிறது. B, C ன் மதிப்பில் சிறிது பிழை ஏற்பட்டால் முக்கோணத்தின் பரப்பில் ஏற்படும் பிழை $\frac{1}{2}(b^2 \delta C + c^2 \delta B)$ எனக் காண்பி.

8. வளைவு (Curvature).



படம் 11

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாடு வளைவரைக்குரியதாக விருக்கட்டும். அதன்மேல் A ஒரு நிலையான புள்ளி ஆகவிருக்கட்டும். P ஏதாமொரு புள்ளியாக விருக்கட்டும். AP வில்லின் நீளம் 's' என்போம். P ல் போடப்பட்ட, PT என்ற தொடுவரை X ஆயத்துடன் 'ψ' என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்தட்டும். அப்பொழுது $\frac{d\psi}{ds}$ என்பதைத்தான் P புள்ளியில் ஏற்படும் வளைவரையின் 'வளைவு' (curvature at the point P) அல்லது 'கோட்டம்' எனச் சொல்கிரேம். P ல் போடப்பட்ட செங்கோட்டில் PC $= \dfrac{1}{\frac{d\psi}{ds}}$ அளவுடைய நீளத்தைக் குறித்து C ஐ மையமாகவும், PC ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டம் வரைந்தால் அதைக் 'கோட்டவட்டம்' எனக் கூறுவோம். CP ஐ 'கோட்ட ஆரை' என்றும், C ஐ கோட்ட வட்டமையம் என்றும் கூறுவோம். கோட்ட ஆரையை ρ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம்.

8·1. P யின் கார்டீசியன் வாய்பாடு: (Cartesian formula for P).

வளைவரைக்கு யாதொரு புள்ளியிலும் போடப்பட்ட தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= \frac{dy}{dx}$.

அதாவது, $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$

$$\psi = \tan^{-1}(y_1)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{1+y_1^2} \cdot \frac{d}{ds}(y_1)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{1+y_1^2} \cdot \frac{d}{dx}(y_1) \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{1}{1+y_1^2} \cdot y_2 \cdot \cos\psi$$

$$= \frac{1}{1+y_1^2} \cdot y_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{1+y_1^2} \cdot y_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

$$= \frac{y_2}{(1+y_1^2)^{3/2}}$$

P ல் கோட்ட ஆரை $= \dfrac{1}{\dfrac{d\psi}{ds}}$

$$= \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}$$

மாதிரி 1.

$x^3 + y^3 = 4xy$ என்ற வளைவரையில், (2, 2) என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

$$x^3 + y^3 = 4xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,2)} = -1$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(2,\,2)} = -8$$

$$P = \left|\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}\right| = \left|\frac{(1+1)^{3/2}}{-8}\right| = \frac{1}{2^{3/2}}$$

மாதிரி 2.

$x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைவரையில், 'θ' என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

$$x = a\,(\theta + \sin\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\,(1 + \cos\theta) = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$y = a\,(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{4a\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

$$P = \left|\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y^2}\right|$$

$$= \frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}}{\dfrac{1}{4a\cos^4\frac{\theta}{2}}} = 4a\cos^4\frac{\theta}{2}\cdot\sec^3\frac{\theta}{2}$$

$$= 4a\cos\frac{\theta}{2}$$

பயிற்சி 29

1. $(3+x)\,y=2x$ என்ற வளைவரையில், $(3, 1)$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ என்ற வளைவரையில், $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையைக் காண்க,

3. $x^3+y^3=3axy$ என்ற வளைவரையில் $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

4. $x^{1/3}+y^{1/3}=1$ என்ற வளைவரையில் $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரை $\frac{3}{16}\sqrt{2}$ என நிரூபி.

5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=2$ என்ற நீள் வட்டத்தில், $(3, 4)$ புள்ளியிடத்து வளைவை (curvature) க் கண்டுபிடி.

6. கீழ்வரும் வளைவரைகளில் எந்த ஒரு புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

(i) $x=at^2,\ y=2at$

(ii) $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

(iii) $x=6t^2-3t^4,\ y=8t^3$.

(iv) $x=a\log\sec\theta,\ y=a(\tan\theta-\theta)$

(v) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$

(vi) $x = \log t,\ y = \dfrac{t+t^{-1}}{2}$

7. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் P என்ற யாதொரு புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையின் இருபடி SP^3 க்குத் தக வேறுபாடு அடையும் என நிறுபி. (S என்பது பரவளையத்தின் குவியம்).

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தில், P என்ற யாதொரு புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரை $\dfrac{CD^3}{ab}$ க்குச் சமம் என நிறுபி. (CP, CD நீள் வட்டத்தின் துணையியவிட்டங்கள்).

9. $xy^2 = 16\,(x+4)$ என்ற வளைவரையில் $(-4, 0)$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

10. $y^2 = \dfrac{a^2\,(a-x)}{x}$ என்ற வளைவரையில் $(a, 0)$ என்ற புள்ளியிடத்து கோட்ட ஆரை $\dfrac{1}{2}\,a$ எனக் காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 13

1. $0; \quad 12; \quad -18; \quad -60$

2. $2(1-x)$

பயிற்சி 14

1. $5 \cdot 2^4$ 2. $\frac{1}{15}$ 3. 2 4. $-\frac{1}{2}$ 5. 6 6. $\frac{1}{(2a)^{1/2}}$

7. $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{3}$ 9. $\frac{1}{2}$ 10. $\frac{5}{3}$ 11. $\frac{a}{b}$ 12. $\frac{a^2}{b^2}$

13. 1 14. 0 15 $\frac{1}{2}$.

பயிற்சி 15

1. $12x^2-10x+6$. 2. $2ax+b$

3. $42x^6+\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^2}$ 4. $\frac{4}{3}x^{1/3}$ 5. $-\frac{2}{x^3}+2x$

6. $\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2x^{3/2}}+\frac{5}{2}x^{1/4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{7/4}}$

7. $4e^x-\frac{1}{x}+\frac{5}{2}x^{3/2}$ 8. $\frac{2}{x}-1$

9. $3\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}\right)$

10. $-3x^2+4x-5x^4$ 11. $2[-x\sin x+\cos x]$

12. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\log x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

13. $(2x-1)(3x^2+4)(-7)+(3x^2+4)(5-7x)(2)$
$+(2x-1)(5-7x)(6x)$

14. $e^x\sin x\cdot\frac{1}{x}+\sin x\cdot\log x\, e^x+e^x\log x\cdot\cos x$

15. $\sqrt{x}\cdot\cos x-\sin x\frac{1}{2\sqrt{x}}\;/\;x$

16. $(1+\tan x)\cos x-\sin x\sec^2 x\;/\;(1+\tan x)^2$

17. $(\sec x-x^2)(e^x+\cos x)-(e^x+\sin x)(\sec x\tan x-2x)/(\mathrm{Dr})^2$

18. $(1+\sec x)\cdot\left(\frac{1}{x}+2e^x\right)-(\log x+2e^x)(\sec x\tan x)/(\mathrm{Dr})^2$

19. $\frac{1}{2\sqrt{3+2x}}\cdot 2$

20. $(x+a)^n\cdot m(b-x)^{m-1}(-1)+(b-x)^m\cdot n(x+a)^{n-1}$

21. $-\sin(b-ax^n)(-anx^{n-1})$

22. $n\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{n-1}\cdot\left[\frac{(x^2+1)-(x)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}\right]$

23. $\frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}(2ax+b)$

24. $\sin^2 5x\cdot 2\sec^2 2x+\tan 2x\cdot 2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5$

25. $3\sin^2 2x(\cos 2x)(2)$ 26. $\frac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}\cdot\sec^2 x$

27. $\sin mx\,(-n\sin nx)+\cos nx\,(m\cos mx)$

28. $-\sin(\sin x)\,.\,\cos x$ 29. $\cot x$

30. $-\sin(e^x\,.\,\log x)\left[e^x\,.\,\dfrac{1}{x}+\log x\,.\,e^x\right]$

31. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left[\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{b-\sqrt{x}}\right]$

32. $\cos x\left[\dfrac{1}{1+\sin x}+\dfrac{1}{1-\sin x}\right]$

33. $e^{-x}\,[2\cos 2x-3\sin 3x]+(\sin 2x+\cos 3x)\,(-e^{-x})$

34. $\sin^m x\,.\,n\cos^{n-1}x\,(-\sin x)+\cos^n x\,.\,m\sin^{m-1}x\cos x]$

35. $(2x+3)^5\,.\,\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-1}}\,.\,3x^2+\sqrt{x^3-1}\,.\,5\,(2x+3)^4\,.\,2$

36. $e^x\left[\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{1}{1-e^x}\right]$ 37. $\sec x$

38. $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\,.\,2x\right)$

39. $e^{ax}\,.\,a\cot ax+\log\sin ax\,.\,ae^{ax}$ 40. $\dfrac{1}{\log_e 10}\,.\,\dfrac{1}{x}.$

பயிற்சி 16

1. $\dfrac{1}{\sqrt{12x-5-4x^2}}$ 2. $\dfrac{2}{1+x^2}$

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ 4. $\dfrac{3x^4}{1+x^6}+2x\tan^{-1}(x^3)$

5. $\dfrac{e^x}{\sin^{-1}(e)^x\sqrt{1-e^{2x}}}$ 6. $-1.$

7. $\dfrac{1}{x\{1+(\log x)^2\}}$ 8. $\dfrac{e^x}{3(1+e^{2x})\{\tan^{-1}(e^x)\}^{2/3}}$

9. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\sin x}$ 10. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

11. $\dfrac{\log x}{x(2+\log^2 x)\sqrt{1+\log^2 x}}$

12. $\dfrac{8-3x^2-10x^3}{2\sqrt{(2-x^3)}\{1-(2x+1)^2(2-x^3)\}}$

13. $3\cot b\ 3x$ 14. $\dfrac{3}{\sqrt{16+9x^2}}$ 15. $\dfrac{1}{2\cos x}$

16. $\tan^{-1}x\left\{\cos x\tan^{-1}x+\dfrac{2\sin x}{1+x^2}\right\}$

17. $\dfrac{3}{1+x^2}$ 18. $\dfrac{1}{4\sqrt{e^{2x}-1}}$ 20. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$.

பயிற்சி 17

1. $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$; 2. $\dfrac{2}{1+x^2}$; 3. $\dfrac{2}{1+x^2}$

4. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\dfrac{2}{1+x^2}$; 6. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 9. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

10. $-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$; 11. $\dfrac{1}{2}$; 12. $-\dfrac{1}{2}$

13. $\sqrt{a^2-x^2}$; 14. $\dfrac{\sqrt{c^2-x^2}}{x}$.

பயிற்சி 18

1. $-\dfrac{ax+hy}{hx+by}$

2. $-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$

3. $-\dfrac{c^2}{x^2}$

4. $\dfrac{y}{x}$

5. $\dfrac{x\,(a^2-2x^2-2y^2)}{y\,(a^2+2y^2+2x^2)}$

6. $-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2/3}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$

7. $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{y}{x-2a}$.

பயிற்சி 19

1. $\dfrac{1}{t}$

2. $-\dfrac{b}{a}\cot\theta$

3. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

4. $-\dfrac{b}{a}\tan\theta$

5. $\tan\dfrac{\theta}{2}$

6. $-\cot^3\theta$

7. $\tan t$

8. $\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$

9. $\dfrac{\sin\theta\,(2\cos 2\theta-1)}{\cos 3\theta}$.

பயிற்சி 20

1. (1) 1 (2) $e^{\sin^{-1}x}$

(3) $\dfrac{1}{4x\sqrt{x+1}}$ (4) $-\dfrac{1}{2}$

பயிற்சி 21

1. $(-1)^n\,.\,n!\left[\dfrac{2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

2. $(-1)^n \cdot n! \left[\frac{5}{9(x-1)^{n+1}} + \frac{n+1}{3(x-1)^{n+2}} + \frac{4}{9(x+2)^{n+1}}\right]$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n \cdot n!}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^{n+1}}\right]$

4. $16\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$

5. $\frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^{n-1}}{} \left[\frac{1}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(2x+1)^{n+1}}\right]$

6. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$

7. $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$

8. $-\frac{1}{2^{11}}\Big[12^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}+12\theta\right) - 2.10^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+10\theta\right)$

$- 4.8^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+8\theta\right) + 10 \cdot 6^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+6\theta\right)$

$+5.4^n.\sin\left(\frac{n\pi}{2}+4\theta\right) - 20 \cdot 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2\theta\right)\Big]$

9. $\frac{1}{4}\Big[2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right) + 4^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+4x\right)$

$+ 6^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+6x\right)\Big]$

10. $\frac{1}{4}\Big[4^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+4x\right) + 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right)$

$+ 6^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+6x\right)\Big]$

11. $2^{2n-1} \cdot e^{4x} - \frac{1}{2}(20)^{n/2} e^{4x}\cos\left(2x + n\tan^{-1}\frac{1}{2}\right).$

பயிற்சி 22

1. (i) $3x+y-10=0$; $x-3y+10=0$.

   (ii) $3x+5y-14=0$; $5x-3y-12=0$;

   (iii) $y = \frac{x}{t}+at$; $y+tx=2at+at^3$

   (iv) $x\cos\theta+y\sin\theta=a$.

   (v) $x+yt^2=2ct$; $y-xt^2=\frac{c}{t}(1-t^4)$

   (vi) $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$; $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{bx}{\sin\theta}=a^2-b^2$.

2. $10x+3y-32=0$. 5. $3x+y=10$.

6. $2x-y=1$; $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$; $\frac{5}{4}$.

11. $x=y\cot\frac{\theta}{2}+a\theta$. 12. $x=y\tan\frac{\theta}{2}+a\theta$.

13. $4x\sin^3\theta=4y\cos^3\theta-3\sin 4\theta$.

பயிற்சி 23

1. $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $2a$, $a\sqrt{5}$

7. $a\sin^2\theta$, $a\sin^3\theta\sec\theta$, $a\sin^2\theta\cos\theta$, $a\sin^4\theta\sec\theta$

8. $a\cot t(\sin t-t\cos t)$; $a\tan t(\sin t-t\cos t)$

9. $a\sin\theta$; $a(1-\cos\theta).\tan\frac{\theta}{2}$.

பயிற்சி 24

1. 80π க. அ. 2. $\frac{1}{90\pi}$ க. அ. 3. $\frac{3''}{8\pi}$ 4. 1050π 5. $\frac{1''}{\pi}$

6. $-\frac{8}{3}$ 7. $\frac{350'}{3}$ 8. $\frac{30}{7}$ மை. 9. $40\sqrt{3}$ 10. $\frac{81''}{8\pi}$

பயிற்சி 25

1. தி. வே. $16'$; தி. வே. மா. $-32'/\sec^2$

2. தி. வே. மா. $12'/\sec^2$

3. தி. வே. $= -3'/\sec.$; தி. வே. $= 0$ ஆனால், தி. வே. மா. $= \pm 6'$.

பயிற்சி 26

1. (i) மீப்பெரு மதிப்பு -54; மீச்சிறு -71

3. முடியுடன் $h = 2r$; முடியில்லாமல் $h = r$

10. அடி ஆரம் $1''$; பாதி உச்சிக்கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

பயிற்சி 27

1. (i) $u_x = a \,.\, \sec^2(ax+by)$; $u_y = b\sec^2(ax+by)$

(ii) $u_x = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$; $u_y = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(iii) $u_x = \frac{2x^2+2xy-x^2-y^2}{(x+y)^2+(x^2+y^2)^2}$.

பயிற்சி 28

1. 1 2. ·7 4. $\frac{5\pi\cot 63^\circ}{36}$ 8. $(2+\alpha\cot 2\alpha)\%$.

பயிற்சி 29

1. $\frac{(37)^{3/2}}{12}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{3a}{2^{7/2}}$ 5. $\frac{125}{24}$

6. (i) $2a\,(1+t^2)^{3/2}$ (ii) $\frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$

(iii) $6t\,(1+t^2)^2$ (iv) $a\sec\theta\,\tan\theta$

(v) at (vi) $\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$

9. 2.

தொகை நுண் கணிதம்

1. தொகை காணல்

(Integration)

1·1 தொகை நுண்கணித முறை வகைநுண் கணித முறையின் தலைகீழ் மாற்று முறையே ஆகும். ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். அதை வகைக்கெழு வாகக் கொண்ட முதற் சார்பைக் காண்பதே தொகை நுண் கணிதத்தின் நோக்கமாகும்.

$\frac{d}{dx}$ [F (x)] = f (x) ஆனால், F (x) என்பது, f (x) ன் ஒரு தொகையாகும். [F (x) என்பது f (x) ன் முதற் சார்பு (Primitive) ஆகும். ஆனால் தொகை (Integral) என்று கூறுவது மரபு. ஆனால் அவை இரண்டிற்கும் வேறுபாடு உண்டு என்று மாத்திரம் அறியவும்]. இதனைத்தான்

$\int f(x)\,dx = F(x)$ என்று குறிப்போம், இங்கு f (x) தொகுக்கப்படும் சார்பெனவும் F (x) தொகை எனவும், x தொகைக் குரிய மாறி எனவும் கூறப்படும்.

C என்பது ஏதாமொரு மாறிலியாக விருந்தால்,

$$\frac{d}{dx}\,[\,F(x) + C\,] = f(x) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

C க்கு எந்த மதிப்புக் கொடுத்தாலும், இது உண்மை. ஆகவே F (x) + C என்பதைத் தொகை அல்லது அளவுபடாதது (Indefinite Integral) எனச் சொல்வோம். ஒவ்வொரு தொகைக்கும் ஏதாமொரு மாறிலி C சேர்க்கப்படுவது தொகை காண் முறைக்குரியதாகும். சில குறிப்பிட்ட இடங்களில்

விவரங்கள் அளிக்கப்பட்டிருந்தால், C ன் மதிப்பைக் காண லாம்.

தொகை காண் முறையை வகைக் கெழு காணும் முறை யோடு இணைத்து, அவை ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ் மாற்று முறை என்பதை அறிந்து, சில திட்ட அமைப்புகள் அல்லது வாய்பாடுகள் நிறுவலாம். கீழ் குறிக்கப்பட்ட வாய்பாடு களில் தொகையுடன் C என்ற மாறிலியைக் கூட்டிக் கொள்ளவும்,

1. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

2. $\int dx = x$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \log_e x$

4. $\int e^x \, dx = e^x$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x$

6. $\int \cos x \, dx = \sin x$

7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x$

9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$

10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x$

11. $\int \cosh x \, dx = \sinh x$

12. $\int \sinh x \, dx = \cosh x$

13. $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x$

14. $\int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\cot hx$

15. $\int \sec hx \tan hx \, dx = -\operatorname{sech} x$

16. $\int \operatorname{cosech} x \cot hx \, dx = -\operatorname{cosech} x$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ அல்லது $-\cos^{-1} x$

18. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$ அல்லது $-\cot^{-1} x$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$ அல்லது $-\text{cosec}^{-1} x$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x.$

மற்றும் இரண்டு முக்கியமான குறிப்புகள்.

(i) $\int R f(x)\, dx = R \int f(x)\, dx$

(ii) $\int (u \pm v \pm w)\, dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx.$

மாதிரி 1.

தொகை காண்க. $\int \frac{x^2+5}{x^3} dx.$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{5}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x^3}$$

$$= \log_e x + 5\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + C$$

$$= \log_e x - \frac{5}{2x^2} + C$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\, dx$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx$$

$$= \int (1+\cos x)\,dx$$

$$= \int dx + \int \cos x\,dx$$

$$= x + \sin x + C.$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \tan^2 x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + C.$$

பயிற்சி 30

x ஐ ஒட்டித் தொகையிடுக.

1. ax^2+bx+c
2. $(x^2-1)^2$
3. $x^{2/3}+x^{1/3}+1$
4. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$
5. $\frac{x^2-5x+2}{\sqrt{x}}$
6. $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{1+x^2}$
7. $\cot^2 x$
8. $10\cos x - 5\sec x\tan x$
9. $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$
10. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
11. $\sec x(\sec x - \tan x)$
12. $\cos^2 x/2$
13. $\sin^2 x/2$
14. $(2+x)^3$
15. $x(1-x)^3$.

1·2 தொகை காணத் திட்ட முறைகள் (Standard Methods of Integration).

தொகை காண, பலவிதிகளும் முறைகளும் உள்ளன. அவைகளைப் பாகுபடுத்திக் கூறுங்கால், பொதுவாக ஐந்து தலைப்புகளின் கீழ் அவைகளைக் கற்கலாம்.

(i) ஈடு செய்து தொகை காணல் (Method of Substitution).

(ii) இயற்கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Algebraic functions).

(iii) கோண கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Trigonometric functions).

(iv) விகித முருத சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Irrational functions).

(v) பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல் (Integration by parts).

ஈடுசெய்து தொகை காணல்.

அமைப்பு I—மதிப்பிடுக: $\int f(ax+b)\,dx$

$ax + b = u$ என்க.

$adx = du.$

$$\therefore \int f(ax+b)\,dx = \int \frac{1}{a} f(u)\,.\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int f(u)\,du.$$

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக: $\int (ax+b)^n\,dx.$

$ax + b = u$ என்க.

$adx = du.$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \int u^n \cdot \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int u^n\, du$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\, a} + C$$

இதே மாதிரி கீழ் வருவனவற்றையும் நிரூபணம் செய்யலாம்.

1. $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{\log (ax+b)}{a} + C$

3. $\int \sin (ax+b)\, dx = - \frac{\cos (ax+b)}{a} + C$

4. $\int \cos (ax+b)\, dx = \frac{\sin (ax+b)}{a} + C$

5. $\int \sec^2 (ax+b)\, dx = \frac{\tan (ax+b)}{a} + C$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக: $\int \cos^2 x\, dx$

$$\cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int \cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடு : $\int \cos^3 x \, dx$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos 3x \, dx + \frac{3}{4} \int \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3} + \frac{3}{4} \cdot \sin x + C$$

$$= \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3 \sin x}{4} + C$$

மாதிரி 4.

மதிப்பிடுக : $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\left[4 \sin x \sin 2x \sin 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 \sin x \cdot 2 \sin 2x \sin 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 \sin x (\cos x - \cos 5x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos 5x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x\right]$$

$$\therefore \int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 4x}{4} \right] + C$$

மாதிரி 5.

மதிப்பிடுக : $\int \tan^2 2x \, dx$

$$= \int (\sec^2 2x - 1) \, dx$$

$$= \int \sec^2 2x \, dx - \int dx$$

$$= \frac{\tan 2x}{2} - x + C$$

பயிற்சி 31

கீழ் வருவனவற்றிற்கு x ஐ ஒட்டித் தொகை காண்க :

1. $(2x+3)^5$
2. $(3-2x)^{10}$
3. $\frac{1}{(a-bx)^n}$
4. $\frac{1}{3-5x}$
5. e^{2-3x}
6. $\sqrt{e^x}$
7. $\frac{1}{\sqrt{a-bx}}$
8. $\frac{1}{(b+ax)^{p/q}}$
9. $\sin nx$
10. $\sec^2 (1-2x)$
11. $\operatorname{cosec}^2 3x$
12. $\operatorname{cosec} 2x \cot 2x$
13. $\sec 3x \tan 3x$
14. $\sin^2 3x$
15. $\sin 3x \cos x$
16. $\cos 5x \cos 3x$
17. $\sin 2x \sin x$
18. $\cos x \cos 2x \cos 3x$

19. $\sin^2 x \cos 3x$

20. $\sin^3 x$

21. $\cos^3 3x$

22. $\sin^3 ax$

23. $\sin^3 x \cos^3 x$

24. $(a-b)\sec^2 \dfrac{x}{2}$

25. a^{mx}.

1·4. அமைப்பு II : தொகைக்குரிய சார்பு $F\{f(x)\}f'(x)$ என்ற அமைப்பைப் பெற்றால் $u=f(x)$ என்ற பிரதியிடலால், தொகை காண முடியும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக: $\displaystyle\int \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx$

இங்கு $\dfrac{1}{x}$, $\log x$ ன் வகைக்கெழு என்பதைக் காணலாம்.

$u = \log x$ என்க.

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx = \int \sin u \,.\, du$$

$$= -\cos u + C$$

$$= -\cos(\log x) + C.$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int e^{(\sin^2 x+\cos x)}(\sin 2x - \sin x)\,dx$

இங்கு $(\sin 2x - \sin x)$ என்பது $(\sin^2 x + \cos x)$ ன் x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு என்பதைக் காண்க.

$u = (\sin^2 x + \cos x)$ என்க.

$$du = (\sin 2x - \sin x)\,dx$$

$$\int e^{(\sin^2 x+\cos x)} . (\sin 2x - \sin x)\, dx$$

$$= \int e^u . du$$

$$= e^u$$

$$= e^{\sin^2 x+\cos x} + C.$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{10} x} dx$

$$= \int \frac{\sin^8 x}{\cos^8 x . \cos^2 x} dx = \int \tan^8 x . \sec^2 x\, dx.$$

$u = \tan x$ என்க.

$du = \sec^2 x\, dx$

$$= \int u^8\, du = \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

மாதிரி 4.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

தொகைக்குரிய சார்பில், தொகுதியையும் பகுதியையும் e^x ஆல் பெருக்குக. ஆகவே,

$$\int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx$$

$e^x = u$ என்க.

$e^x\, dx = du$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1}(u) + C$$

$$= \tan^{-1}(e^x) + C$$

பயிற்சி 32

x ஐ ஒட்டித் தொகை காண்க.

1. $\dfrac{\sec^2(\log x)}{x}$
2. $(e^x+1)^4 \cdot e^x$
3. $\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$
4. $\dfrac{1}{\tan^{-1}x\,(1+x^2)}$
5. $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(a^2+x^n)^{10} \cdot x^{n-1}$
7. $\sin(x^n) \cdot x^{n-1}$
8. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
9. $\dfrac{(1+\sqrt{x})^n}{\sqrt{x}}$
10. $\dfrac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$
11. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}\right)^n \cdot \dfrac{1}{x^2}$
12. $e^{(x+1/x)}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$
13. $\dfrac{1}{e^{-x}+1}$
14. $\sqrt{\sin x}\,\cos^5 x$
15. $\log\sin x \cdot \cot x$
16. $\sqrt{\tan x} \cdot \sec^2 x$
17. $\sin^5 x\,\cos^2 x$
18. $\sec^6 x \cdot \tan x$
19. $\dfrac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$
20. $\log\sec x \cdot \tan x.$

1·5 அமைப்பு III: தொகைக்குரிய சார்பு $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ என்றுக அமைவதாக இருந்தால் $u=f(x)$ என்ற பிரதியிடலைக் கையாள வேண்டும்.

திட்ட அமைப்புகள் (standard forms).

(i) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$u = \cos x$ என்க.

$$du = -\sin x\, dx$$

$$= \int -\frac{du}{u} = -\log u$$

$$= -\log\cos x + C$$

$$= \log\sec x + C$$

அதேமாதிரி

(ii) $\int \cot x\, dx = \log\sin x + C.$

(iii) $\int \sec x\, dx$

$$= \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx$$

$u = (\sec x + \tan x)$ என்க.

$$du = (\sec x\, \tan x + \sec^2 x)\, dx$$

$$= \sec x\, (\sec x + \tan x)\, dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log(\sec x + \tan x) + C$$

அதேமாதிரி,

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C.$

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}\, dx$

$e^{2}x - 1 = u$ என்க.

$$2e^{2x}\, dx = du$$

$$= \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\log u = \frac{1}{2}\log(e^{2x} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^{2x} - 1) + C$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{2\cos x + 7\sin x}{2\sin x - 7\cos x}\, dx$

தொகைக்குரிய சார்பில், தொகுதி பகுதியின் வகைக்கெழு எனக் காண்.

$$u = 2\sin x - 7\cos x \text{ என்க.}$$

$$du = (2\cos x + 7\sin x)\, dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log(2\sin x - 7\cos x) + C.$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{\sin x \cos x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$

$$a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x = u \text{ என்க.}$$

$$\{ a^2 . 2\sin x \cos x + b^2(-2\sin x \cos x)\}\, dx = du$$

$$(a^2\sin 2x - b^2\sin 2x)\, dx = du$$

$$\sin 2x\,(a^2 - b^2)\, dx = du$$

$$\sin 2x\, dx = \frac{du}{a^2 - b^2}$$

$$\sin x \cos x\, dx = \frac{du}{2(a^2 - b^2)}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) + C.$$

பயிற்சி 33

1. $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$

2. $\frac{1}{e^{-x} + 1}$

3. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 4. $\dfrac{5\cos x - 3\sin x}{5\sin x + 3\cos x}$

5. $\dfrac{\cot x}{\log \sin x}$ 6. $\dfrac{x^{-1}}{a + bx^n}$

7. $\dfrac{\sec x}{\sec x + \tan x}$ 8. $\dfrac{1 + \cos x}{x + \sin x}$

9. $\dfrac{\sec^2 x}{a + b\tan x}$ 10. $\dfrac{x}{ax^2 + b}$

1·6 விகிதமுறு இயற்கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணுதல் (Integration of Rational Algebraic function).

அமைப்பு I: திட்ட அமைப்புகள் அல்லது வாய்பாடு கள் (standard forms).

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a}$$ (பகுதி பின்னங்களாகப் போட்டால்)

$$A = -\frac{1}{2a};\ B = +\frac{1}{2a}.$$

$$\therefore \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log (x-a) - \log (x+a)\right]$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x-a} + \text{C}.$$

அதேமாதிரி,

(iii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + \text{C}$ ஆகும்.

இந்த அமைப்பு I (Type I)-ல், தொகைக்குரிய பொருள் $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ ஆகும். இங்கு ax^2+bx+c ஐக் காரணிப்படுத்த முடியாததாக விருக்கும். அந்த நிலையில், x உறுப்புக்களை ஒன்றுபடுத்தி இருபடித்தான உருவத்தைப் பெறச் செய்ய வேண்டும். பின், மேல் குறிக்கப்பட்ட 3 திட்ட அமைப்புகள் அல்லது வாய்பாடுகளை ஒட்டி அமையும். நாம் தொகை காண எளிதில் முடியும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

$$= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} . \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} . \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{C}$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{1-x-x^2}$

$$= \int \frac{dx}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \log \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - x - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{\sqrt{5} + 2x + 1}{\sqrt{5} - 2x - 1}$$

1·7. அமைப்பு II (Type II) : $\int \frac{lx+m}{ax^2+bx+c}$.

தொகை காண, தொகைக்குரிய சார்பின் தொகுதியை (Numerator)ப் பின்வருமாறு எழுதவேண்டும். அதாவது $lx + m = A \cdot \frac{d}{dx}$ (பகுதி) $+ B$ என்று எழுதவேண்டும். தொகைக்குரிய சார்பு இரண்டாகப் பிரியும். அவற்றை முற்கூறிய விதிகளால் தொகைகாண முடியும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{x+1}{x^2+6x+25} dx$

$$x + 1 = A(2x + 6) + B.$$

$$2A = 1 ; \quad \therefore \quad A = \tfrac{1}{2}.$$

$$6A + B = 1 ; \quad \therefore \quad B = -2.$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+1}{x^2+6x+25} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6) - 2}{x^2+6x+25} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+6)\, dx}{x^2+6x+25} - 2 \int \frac{dx}{x^2+6x+25}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+6x+25) - 2\int \frac{dx}{(x+3)^2+(4)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+6x+25) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \tan^{-1}\frac{x+3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+6x+25) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+3}{4} + C$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$

$$x^2+x+1 = A(x^2-x+1) + B(2x-1) + C.$$

$$A = 1$$

$$-A+2B = 1$$

$$2B = 2$$

$$\therefore \quad B = 1$$

$$A-B+C = 1$$

$$\therefore \quad C = 1$$

$$\therefore \quad x^2+x+1 = (x^2-x+1)+2x-1+1.$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{(x^2-x+1)+(2x-1)+1}{(x^2-x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \int dx + \log(x^2-x+1) + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= x + \log(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\cdot\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

பயிற்சி 34

மதிப்பிடுக :

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$
2. $\int \frac{dx}{x^2-12x+36}$
3. $\int \frac{dx}{x^2-2x-35}$
4. $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$
5. $\int \frac{dx}{1+x-x^3}$
6. $\int \frac{x^2}{x^6+2x^3+2}\,dx$
7. $\int \frac{dx}{3x^2-4x-5}$
8. $\int \frac{dx}{-1+x-2x^2}$
9. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$
10. $\int \frac{3x-2}{1-6x-9x^2}\,dx$
11. $\int \frac{5x+1}{x^2-2x-35}\,dx$
12. $\int \frac{x+5}{3+2x-3x^2}\,dx$
13. $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,dx$
14. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$
15. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}\,dx$
16. $\int \frac{1-3x}{2x^2-6x+5}\,dx$
17. $\int \frac{x^3}{4+2x^4-x^8}\,dx$
18. $\int \frac{x^2-x+1}{1-x-x^2}\,dx$
19. $\int \frac{1-x}{4x^2-4x+3}\,dx$
20. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx.$

1·8. அமைப்பு III—பகுதி பின்ன முறை (Method of partial fractions).

தொகைக்குக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் பகுதியைச் சினைகளாகப் பிரித்து, பகுதிபின்ன முறையைக் கையாள வேண்டும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக. $\int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)} dx$

$$\frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$x^2+11x+14 = A(x-2)(x+2) + B(x+3)(x+2) + C(x+3)(x-2)$$

$x = 2$ ஐ ஈடாக்கினல், $20B = 40$

$\therefore \quad \underline{B = 2}$

$x = -2$ ஐ ஈடாக்கினல், $-4C = -4$

$C = 1$

$x = -3$ ஐ ஈடாக்கினல், $5A = -10$

$A = -2$

$$\therefore \int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)} dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{dx}{x-2} + 1\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -2\log(x+3) + 2\log(x-2) + \log(x+2)$$

$$= \log(x+3)^{-2} + \log(x-2)^2 + \log(x+2)$$

$$= \log \frac{(x+2)(x-2)^2}{(x+3)^2}$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$x = -1$, ஈடாக்கினல், $3A = 1$; $\quad \therefore \quad A = \frac{1}{3}$

$x = 1$, ஈடாக்கினுல் $A + 2B + 2C = 1$

$$2B + 2C = \frac{2}{3}$$

$$B + C = \frac{1}{3}$$

$x = 0$, ஈடாக்கினுல், $A + C = 1$

$$C = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

பயிற்சி 35

x ஐ ஒட்டித் தொகை காண்க.

1. $\dfrac{x+5}{(x-1)(x-4)}$

2. $\dfrac{3x+4}{(x-6)(x+2)^2}$

3. $\dfrac{1}{x(x+1)(1-2x)}$

4. $\dfrac{1}{x(x^4+1)}$

5. $\dfrac{3x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 6. $\dfrac{3x+1}{(x+2)^2}$

7. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$. 8. $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}$

9. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ 10. $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(2x+1)}$

11. $\dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$ 12. $\dfrac{3x-1}{(x^2+1)(x-2)}$

13. $\dfrac{x}{x^3-1}$ 14. $\dfrac{1}{x(x^3+x^2+x)}$

15. $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+3\cos x+2}$ 16. $\dfrac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}$

17. $\dfrac{\sec^2 x}{(\tan x+1)(\tan x+2)}$ 18. $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

19. $\dfrac{x}{x^3+1}$ 20. $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

1·9. கோண கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல் (Integration of Trigonometric functions).

அமைப்பு I (Type I) $\displaystyle\int \frac{a\cos x+b\sin x}{l\cos x+m\sin x}\,dx$

வழி: தொகைக்குரிய சார்பின் தொகுதியை A (பகுதி) $+\ \mathrm{B}\cdot\dfrac{d}{dx}$ (பகுதி)க்கு ஈடாக்கினல் எளிதில் தொகை காண முடியும்.

மாதிரி 1.

தொகை காண்க. $\displaystyle\int \frac{p\sin x+q\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx$. $p\sin x+q\cos x$

$= \mathrm{A}\,(a\sin x+b\cos x)+\mathrm{B}\,(a\cos x-b\sin x)$

$$aA - bB = p$$

$$bA + aB = q$$

$$A(a^2+b^2) = ap+bq$$

$$A = \frac{ap+bq}{a^2+b^2}$$

$$B = \frac{aq-bp}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \int \frac{p \sin x + q \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

$$= \frac{ap+bq}{a^2+b^2} \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx + \frac{aq-bp}{a^2+b^2} \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

$$= \frac{ap+bq}{a^2+b^2} \cdot x + \frac{aq-bp}{a^2+b^2} \log(a \sin x + b \cos x) + C$$

பயிற்சி 35-A

மதிப்பிடுக

1. $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{4 \sin x + 5 \cos x} dx$
2. $\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{4 \cos x + 5 \sin x} dx$
3. $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + \cos x} dx$
4. $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$
5. $\int \frac{5 \cos \theta}{2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$
6. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - 2 \cos x} dx$
7. $\int \frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta} d\theta$
8. $\int \frac{\tan \theta}{3 + 2 \tan \theta} d\theta$
9. $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x} dx$
10. $\int \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x - \sin x} dx$

1·9·1. அமைப்பு II : (II Type) இந்த அமைப்பில் தொகைக்குரிய பொருள் மூன்று உருவங்களைப் பெறலாம்.

(i) $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$

(ii) $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$

(iii) $\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$

தொகைக்குரிய சார்பின் பகுதியில் $\sin x$ அல்லது $\cos x$ ஒரு படித்ததாகத்தான் இருத்தல் அவசியம்.

(i) $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$= \int \frac{dx}{a+b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1} t$$

$$\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{t+t^2}\,.\,dt$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{(1+t^2)\,.\,dx}{a\,(1+t^2)+b\,(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{\frac{(1+t^2)\,.\,2\,dt}{1+t^2}}{(a+b)+t^2\,(a-b)}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\frac{a+b}{a-b}+t^2}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2+t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,t\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b} \cdot \tan\frac{x}{2}\right) \quad (a>b)$$

$a<b$ ஆகவிருந்தால்,

$$= 2\int \frac{dt}{(b+a) - (b-a)t^2}$$

$$= \frac{2}{b-a}\int \frac{dt}{\frac{b+a}{b-a} - t^2}$$

$$= \frac{2}{b-a}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2 - t^2}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + t}{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \cdot t}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \cdot t} + c$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sin x}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(t)$$

$$\frac{1}{2}dx = \frac{1}{1+t^2} \cdot dt$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{a+b \cdot \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{a(1+t^2) + b \cdot 2t}$$

$$= 2\int \frac{dt}{at^2+2bt+a}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2b}{a}t+1}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a-b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\cdot\tan^{-1}\cdot\frac{t+\frac{b}{a}}{\frac{a-b}{a}}$$

$$= \frac{2}{a-b}\cdot\tan^{-1}\cdot\left(\frac{at+b}{a-b}\right)+c$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$

$$= \int \frac{dx}{a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+b\cdot\frac{2t}{1+t^2}},\ \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+b\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{a(1-t^2)+2bt}$$

$$= \int \frac{2dt}{a+2bt-at^2}$$

$$= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{1 + \frac{2b}{a} t - t^2}$$

$$= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{1 - \left(t - \frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1 + \left(t - \frac{b}{a}\right)}{1 - \left(t - \frac{b}{a}\right)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \log \frac{a + at - b}{a - at + b}$$

$$= \frac{1}{a} \log \frac{a(1+t) - b}{a(1-t) + b} + c.$$

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(t)$$

$$\frac{1}{2} \cdot dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + 3\left(\frac{1-t^2}{1+t^1}\right)}$$

$$= \int \frac{2dt}{5(1+t^2) + 3(1-t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{8+2t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{4+t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(2)^2+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{2}\right) + c.$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{1+3\sin x+4\cos x}$

$t = \tan\frac{x}{2}$ ஆனல்

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)+6t+4(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2dt}{5+6t-3t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\frac{5}{3}+2t-t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\frac{8}{3}-(1-t)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2-(1-t)^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{3}}} \cdot \log \frac{\sqrt{\frac{8}{3}} + 1 - t}{\sqrt{\frac{8}{3}} - 1 + t}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{\frac{8}{3}} - 1 + t}{\sqrt{\frac{8}{3}} + 1 - t}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)}$$

பயிற்சி 36

கீழ்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

1. $\int \frac{dx}{12+13\cos x}$
2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$
3. $\int \frac{dx}{13+12\cos x}$
4. $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x}$
5. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
6. $\int \frac{dx}{5-4\sin x}$
7. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$
8. $\int \frac{dx}{5\cos 2x+12\sin 2x}$
9. $\int \frac{1}{1+\tan x}$
10. $\int \frac{\sin x}{3+4\sin x}\,dx$
11. $\int \frac{\cos x}{5-3\cos x}\,dx$
12. $\int \frac{\sin x}{5+4\sin x}\,dx$

1·9.2 விகிதமுருத சார்புகளின் தொகை காணுதல் (Integration of Irrational functions).

தொகை காணக் கையாளப் படும் பொது விதிகள் :

(1) தொகை காணும் சார்பில், வர்க்க மூலக்குறியின் கீழ் ஒருபடி சிஜெயாக விருந்தால், அச்சிஜெயை u^2 க்கு ஈடாக்க வேண்டும்.

(2) வர்க்கமூலக் குறியின் கீழ் அமையும் சார்பு, a^2+x^2 ஆக விருந்தால் $x=a\tan\theta$ அல்லது $x=a\sinh\theta$ வை பிரதியிட வேண்டும்; a^2-x^2 ஆக விருந்தால் $x=a\sin\theta$ வைப் பிரதியிடவேண்டும்; x^2-a^2 ஆக விருந்தால் $x=a\sec\theta$ அல்லது $x=a\cosh\theta$ வைப் பிரதியிடவேண்டும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$

$1+x=u^2$ என்க.

$dx=2u\,du.$

$$=\int\frac{2u\,du}{(u^2-1)\,.\,u}=\int\frac{2du}{u^2-1}$$

$$=2\,.\,\frac{1}{2}\,.\log\frac{u-1}{u+1}$$

$$=\log\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}+c.$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$x=\sin\theta,$ என்க.

$dx=\cos\theta\,d\theta.$

$$= \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1-2\sin^2\theta)\,.\,\cos\theta}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos 2\theta} = \int \sec 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\log(\sec 2\theta + \tan 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\overline{\cos\theta+\sin\theta}^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}-x}\right) + c.$$

பயிற்சி 36-A

1. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\, dx$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}\, dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$
5. $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$
6. $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
7. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$
8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$
9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^3}}$
10. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$
11. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$
12. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

திட்ட அமைப்புகள் அல்லது வாய்பாடுகள் :

(i) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(ii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(iii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(iv) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

(v) $$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

(vi) $$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a}$$

தெரிப்பு (i) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$x = a \sin \theta$ என்க.

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{a \cos \theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}} = \int \frac{a \cos \theta \, d\theta}{a \cos \theta}$$

$$= \int d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$

$x = a \sinh \theta$ என்க.

$$dx = a \cosh \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{a \cosh \theta \, d\theta}{\sqrt{a^2+a^2 \sinh^2 \theta}}$$

$$= \int \frac{a \cosh \theta \, d\theta}{a \cosh \theta}$$

$$= \int d\theta = \theta = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$

$x = a \cosh \theta$ என்க.

$$dx = a \sinh \theta \, . \, d\theta$$

$$= \int \frac{a \sinh \theta}{\sqrt{a^2 \cosh^2 \theta - a^2}} \, d\theta$$

$$= \int \frac{a \sinh \theta}{a \sinh \theta} \, d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(iv) $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$x = a \sin \theta$ என்க.

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$$

$$= \int \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 \theta} \, . \, a \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int a^2 \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{a^2 (1+\cos 2\theta)}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4} . \sin 2\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1} . \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} . \frac{x}{a} . \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1} . \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

$$= \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} . \frac{x}{a}$$

(v) $\int \sqrt{a^3+x^2}\, dx$

$x = a \sinh\theta$ என்க.

$dx = a\cosh\theta . d\theta$

$$= \int \sqrt{a^2+a^2\sinh^2\theta} . a\cosh\theta\, d\theta$$
$$= \int a^2\cosh^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{a^2(1+\cosh 2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2} . \frac{\sinh 2\theta}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2} . \sinh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} . \frac{2\sinh\theta\cosh\theta}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sinh^{-1} . \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} . \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1} . \frac{x}{a} + C$$

(vi) $\int \sqrt{x^2-a^2} . dx$

$x = a\cosh\theta$ என்க.

$dx = a\sinh\theta . d\theta$

$$\int \sqrt{a^2\cosh^2\theta - a^2} . a\sinh\theta\, d\theta$$
$$= \int a^2\sinh^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{a^2 (\cosh 2\theta - 1)}{2} \, d\theta$$

$$= -\frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sinh 2\theta}{2} + C$$

$$= -\frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^3}{2} \cdot \frac{2 \sinh \theta \cosh \theta}{2} + C$$

$$= -\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1} \cdot \frac{x}{a} + C.$$

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக. $\int \sqrt{5 - 3x^2 - 6x} \, dx$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{5}{3} - 2x - x^2} \, dx$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{8}{3} - (x+1)^2} \, dx$$

$\int \sqrt{a^2 - x^2}$ என்ற திட்ட உருவத்தைப் பெற்றமையால், வாய்பாட்டின் மூலம்

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x+1)\sqrt{\frac{5}{3} - 2x - x^2} + \frac{8}{3}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3(x+1)}{8}}\right] + c$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 2^2}}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-6x+18}}\,dx$

$$4x+1 = A\,(2x-6)+B$$

$$2A=4\;;\quad \therefore\quad A=2.$$

$$-6A+B=1$$

$$-12+B=1$$

$$\underline{B=13}$$

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-6x+18}}\,dx$$

$$= \int \frac{2\,(2x-6)+13}{\sqrt{x^2-6x+18}}\,dx$$

$$= 2\int \frac{(2x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+18}} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+18}}$$

$$= 4\sqrt{x^2-6x+18}+13\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+(3)^2}}$$

$$= 4\sqrt{x^2-6x+18}+13\,\sinh^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$$

மாதிரி 4.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+9}}.$

$$x+1 = \frac{1}{t} \text{ என்க.}$$

$$dx = -\frac{1}{t^2}\,.\,dt.$$

$$\therefore = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+9}}$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{(1-t)^2+9t^2}}$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{1-2t+10t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{-dt}{\sqrt{\frac{1}{10} - \frac{t}{5} + t^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{10}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} . \sinh^{-1} . \frac{t - \frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} . \sinh^{-1} . \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} . \sinh^{-1} . \left(\frac{9-x}{3x+3}\right) + c$$

பயிற்சி 37

1. மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x+x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+3}}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-3x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

6. $\int \sqrt{(x-2)(3-x)}\, dx$ 7. $\int \sqrt{x^2+2ax}\, dx$

8. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ 9. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx$

10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}dx$ 11. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

12. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2}}$ 13. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}dx$

14. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}dx$ 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b+x)}}$

16. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$ 17. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 19. $\int \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{3x^2+2x+1}}$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$.

1·9.2 பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல் (Integration by parts).

தேற்றம்: u, v என்பவை x ன் இரு சார்புகளாக விருப்பின்,

$$\int u dv = uv - \int v du \; [uv \neq \text{மாறிலி}]$$

தெரிப்பு: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ எனத் தெரியும்.

இருபக்கங்களையும் x ஐ ஒட்டித் தொகை கண்டால்

$$uv = \int \left(u \cdot \frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= \int u\,dv + \int v\,du.$$

$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du$ ஆகும்.

குறிப்பு: இந்த விதியைக் கையாளும்போது உகந்த u, v தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். $\int v du$ எளிதில் தொகை காணும் படியாக அமைய வேண்டும்.

மாதிரி 1.

மதிப்பிடுக : $\int xe^x\, dx$

$u = x$ என்க ; $dv = e^x\, dx$ என்க.

$$\therefore \quad v = \int e^x\, dx = e^x$$

$$\int u dv = uv - \int v\, du$$

$$= xe^x - e^x = e^x(x-1) + c.$$

மாதிரி 2.

மதிப்பிடுக : $\int x^2 \sin 2x\, dx$

$u = x^2$ என்க ; $dv = \sin 2x\, dx$

$$v = \int dv = \int \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2}$$

$$\therefore \quad \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= x^2\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) . d\,(x^2)$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x\, dx$$

இங்கு, $v = \int dv = \int \cos^2 x\, dx = \dfrac{\sin 2x}{2}$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \int x \,.\, d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \,.\, dx$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

மாதிரி 3.

மதிப்பிடுக : $\int \sin^{-1} x\, dx$

$u = \sin^{-1} x$; $dv = dx$; $\therefore \quad v = x.$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{-du}{\sqrt{u}} \quad [u = 1 - x^2 \text{ என்க}].$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

மாதிரி 4.

மதிப்பிடுக : $\int \log x \, dx$

$u = \log x; \quad dv = dx; \quad \therefore \quad v = x.$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x$$

$$= x (\log x - 1) + c$$

முக்கியமான குறிப்பு : தொகைக்குரிய சார்பில் பொது வாக $e^{ax} dx$, $\sin ax \, dx$, $\cos ax \, dx$ இவைகளை dv என்றும், மற்றதை u என்றும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

தொகைக்குரிய சார்பில் $\log x$, $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ வந்தால், அதை 'u' என்றும், மற்றதை dv என்றும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி 5.

மதிப்பிடுக : $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

$u = \sqrt{a^2 - x^2}$ என்க. $dv = dx; \quad \therefore \quad v = x$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) \, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \,.\, \sin^{-1} . \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} . \frac{x}{a}$$

குறிப்பு: இதே முறையில் $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ இவைகளின் தொகையைக் காண முடியும்.

பயிற்சி 37-A

மதிப்பிடுக:

1. $\int \tan^{-1} x\,dx$
2. $\int x \sin^{-1} x\,dx$
3. $\int x \tan^{-1} x\,dx$
4. $\int (\log x)^2\,dx$
5. $\int x^3 \log x\,dx$
6. $\int x^n \log x\,dx$
7. $\int x^2 \sin^2 x\,dx$
8. $\int x^2 \cos^2 x\,dx$
9. $\int x \sec x \tan x\,dx$
10. $\int x \sec^2 x\,dx$
11. $\int x^2 \cos 2x\,dx$
12. $\int \frac{\log x}{x^2}\,dx$
13. $\int \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx$
14. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx.$

மாதிரி 6.

$\int e^{x}[f(x)+f'(x)]\,dx = e^{x} f(x) + c$ என நிரூபி. இம்முறையைக் கையாண்டு $\int \frac{e^{x}\,.\,x}{(x+1)^2}\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்.

$$\int e^{x}[f(x)+f'(x)]\,dx$$
$$= \int e^{x} f(x)\,dx + \int e^{x}\,.\,f'(x)\,dx$$
$$= \int f(x)\,d(e^{x}) + \int e^{x} f'(x)\,dx$$
$$= e^{x} f(x) - \int e^{x} f'(x)\,dx + \int e^{x} f'(x)\,dx$$
$$= e^{x} f(x) + c.$$

இம் முறையில் $\int \frac{e^{x}\,x}{(x+1)^2}\,dx$ ஐக் காண, முதலில்

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \text{ என்ற}$$

பகுதி பின்னங்களாகப் போடவும்.

$$A = 1$$
$$B = -1$$
$$\therefore \quad \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

இங்கு $-\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{(x+1)}$ ன் வகைக்கெழு என்று காணவும். ஆகவே $\frac{1}{x+1} = f(x)$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \int \frac{e^{x}\,.\,x}{(x+1)^2}xx = \int e^{x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ என்க}; \; f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \quad \int e^{x}[f(x)+f'(x)]\,dx = e^{x} f(x)$$

$$= \frac{e^{x}}{x+1} + c$$

மாதிரி 7.

$\int e^{ax} \sin bx\, dx$ ன் மதிப்புக் காண்க.

$\sin bx$, e^{ibx} ன் கற்பனைப் பகுதி

$\therefore \int e^{ax} \sin bx\, dx = \int e^{ax} . e^{ibx}\, dx$ ன் கற்பனைப்பகுதி.

$= \int e^{(a+ib)x}\, dx$ ன் கற்பனைப் பகுதி

$= \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$,,

$= \dfrac{e^{ax} . e^{ib\,x}}{a+ib}$,,

$= \dfrac{e^{ax} . e^{ibx} . (a-ib)}{(a+ib)\,(a-ib)}$,,

$= \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a-ib) [\cos bx + i \sin bx]$,,

$= \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$

பயிற்சி 38

1. $\int \dfrac{e^x (x+1)}{(x+2)^2} dx$

2. $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$

3. $\int e^x (\tan x + \sec^2 x)\, dx$

4. $\int \dfrac{x + \sin x}{1+\cos x} dx$

5. $\int \dfrac{e^x . (1+\sin x)}{1+\cos x} dx$

6. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

7. $\int e^{3x} \sin 2x\, dx$

8. $\int e^x . \sin^2 x\, dx$

9. $\int e^{2x} \cos x . \cos^3 x\, dx$

10. $\int e^{3x} \cos^2 2x\, dx$.

2. வரையறுத்த தொகை

(Definite Integral)

2·1 $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $x = b$ என்பதை ஈடு செய்தால் $F(x) + c = F(b) + c$ ...... (1)

அம்மாதிரியே, $x = a$ என்பதை ஈடு செய்தால்

$$F(x) + c = F(a) + c \qquad \text{......} \quad (2)$$

$$(1) - (2) = F(b) - F(a).$$

இந்த மதிப்பை $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ என்று குறிப்பிடுக. இதுவே $\int f(x)\,dx$ க்கு a முதல் b வரை, வரையறுத்த தொகை எனப்படும். இங்கு 'a' என்பது கீழெல்லை (lower limit) என்றும், b என்பது மேலெல்லை (upper limit) என்றும் கூறப்படும்.

மாதிரி 1.

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)_0^{\pi/2} - \left(\frac{\sin 2x}{4}\right)_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}. \qquad [\because \ \sin\pi = \sin 0 = 0]$$

மாதிரி 2.

$\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta.$$

$$\cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3\theta}{3}\right)_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\left(\sin\theta\right)_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

மாதிரி 3.

$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$ ன் மதிப்புக் காண்க.

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{du}{u} \qquad (\because \ u = 1+\sin x)$$

$$= \log u = \log(1+\sin x)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \Big[\log(1+\sin x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \log\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right) - \log(1+\sin\theta)$$

$$= \log 2$$

பயிற்சி 39

மதிப்புக் காண்.

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{5x}{x^2+4}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,.\cos^5\theta\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^5\theta\cos^2\theta\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sec^2\theta\,d\theta$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,.\,x^3\,.\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{13+12\cos x}$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos 2\theta}$

15. $\int_0^{\pi} \theta \sin^3 \theta \, d\theta$.

2·2. வரையறைத் தொகையின் பண்புகள் (Properties of definite Integrals).

பண்பு 1: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt$

$\because$ எல்லாத் தொகைகளும் F (b)-F (a) க்குச் சமம்.

பண்பு 2: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

வலது புறம் $= -[F(a) - F(b)]$

$= F(b) - F(a)$.

$= \int_a^b f(x)\,dx$.

பண்பு 3: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

வலதுபுறம் $= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$= F(b) - F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

பண்பு 4: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$a - x = u$ என்க.

$-dx = du$.

புது எல்லைகள் காண, $x = 0, \quad u = a$

$x = a, \quad u = 0$.

$$= \int_{a}^{0} - f(u)\, du = \int_{0}^{a} f(u)\, du$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\, dx \quad [\because \text{ பண்பு } 1]$$

பண்பு 5: (i) $f(x)$ ஒற்றைப்படைச் சார்பானல்

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = 0.$$

(ii) $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பானல்

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

தெரிப்பு ; (i) $f(x)$ ஒற்றைப்படைச் சார்பு ஆதலால் $f(x) = -f(-x)$.

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-y)\, (-dy) \; [x = -y \text{ ஈடுசெய்க}]$$

$$= - \int_{a}^{0} f(-y)\, .\, dy$$

$$= - \int_{0}^{a} f(y)\, dy$$

$$= - \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\, dx = + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = - \int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$= 0.$$

(ii) $f(x) = f(-x)$, $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பு.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)\,(-dy)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(y)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

$$\therefore \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

பண்பு 6: $f(x) = f(2a-x)$ ஆனல்

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$$

$x = 2a - y$, என ஈடு செய்க.

$$dx = -\,dy$$

$$\therefore \int_{a}^{2a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(2a-y)\,.\,(-dy)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(2a-y)\,.\,dy$$

$$= \int_0^a f(2a-y)\,dy$$

$$= \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx.$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

$f(x) = -f(2a-x)$ ஆனால்,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

இப்பண்பை உபயோகப்படுத்திக் கீழ் வரும் குறிப்புகளை எளிதில் காணமுடிகிறது.

(i) $\pi = 2a$ என்க. $f(\sin x) = f\{\sin(\pi - x)\}$ ஆனால்,

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$$

(ii) $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பாயின்

$$f(\cos x) = f\{\cos(\pi - x)\}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx = 0.$$

(iii) $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பாயின்

$$f(\cos x) = -f\{\cos(\pi - x)\}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(\cos x) = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

மாதிரி 1.

நிரூபி. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = \Big(x\Big)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

மாதிரி 2.

நிரூபி. $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x = \frac{\pi}{4}.$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

(1) + (2)

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = \Big(x\Big)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \; I = \frac{\pi}{4}.$$

பயிற்சி 40

1. மதிப்புக் காண் : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{\cos x})^3}{(\sqrt{\sin x})^3 + (\sqrt{\cos x})^3} = \frac{\pi}{4}$

3. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

4. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$ என நிரூபி.

5. $\int_{0}^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx$

$$= -\frac{\pi}{2}\log e^{2}$$

6. $\int_{0}^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

7. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$$

8. $\int_{0}^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$

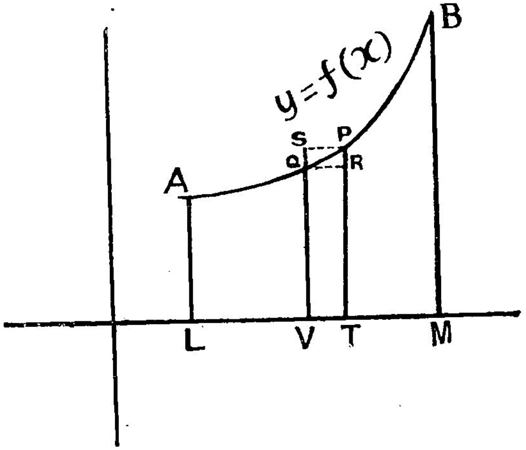
9. $\int_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $\int_{0}^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

3. வரையறைத் தொகை பயன்படும் இடங்கள் (Applications of Definite Integrals)

வரையறைத் தொகைப் பரப்பு, வளைவரை நீளங்கள், உருளையின் பருமங்கள், உருளையின் புறப்பரப்பு முதலியவை களைக் கண்டுபிடிக்க உதவுகிறது.

3·1. பரப்புகள் (Areas).



படம் 12

படத்தில், $y=f(x)$ என்ற வளைவரை AB
$x=a$ ல் போடப்பட்ட குத்தாயம் AL
$x=b$ ல் போடப்பட்ட குத்தாயம் BM
Q வளைவரையில் ஏதாமொரு புள்ளி (x, y)

P அவ்வளைவரையில் மேலுள்ள, Q க்கு அண்மையிலுள்ள புள்ளி. P $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ ஆகவிருக்கட்டும்.

படத்தில் $VT=\triangle x$; $RP=\triangle y$

பரப்பு ALVQ, x ஆயத்தொலையைச் சார்ந்தது, அதாவது VQ ஐச் சார்ந்தது.

எனவே, பரப்பு $ALVQ = F(x)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{பரப்பு } ALTP = F(x+\triangle x)$$
$$\text{பரப்பு } PQVT = F(x+\triangle x) - F(x)$$

பரப்பு VTRQ < பரப்பு VTPQ < பரப்பு VTPS.

$$f(x) \cdot \triangle x < F(x+\triangle x) - F(x) < f(x+\triangle x) \cdot \triangle x$$

$$f(x) < \frac{F(x+\triangle x) - F(x)}{\triangle x} < f(x+\triangle x)$$

$\triangle x \to 0$ என்ற எல்லையை எடுத்தால்

$$f(x) < \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{F(x+\triangle x) - F(x)}{\triangle x} < \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} f(x+\triangle x)$$

$$\therefore \quad f(x) = F'(x) \text{ ஆகிறது.}$$

$$\therefore \quad F(x) = \int f(x)\,dx$$
$$= \phi(x) + c$$

$x=a$ ஆகக் கொண்டால், $F(a) = 0$

$$\therefore \quad O = \phi(a) + c$$
$$\therefore \quad C = -\phi(a)$$
$$\therefore \quad F(x) = \phi(x) - \phi(a)$$

$x=b$ எனக்கொண்டால்

$$F(b) = \phi(b) - \phi(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பு} = \int_a^b f(x)\,dx$$

ஆகவே $y=f(x)$ என்ற வளைவரையில் $x=a, x=b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கும், x ஆயத்திற்கு மிடையேயுள்ள பகுதியின் பரப்பு $A = \int_a^b y\,dx.$

குறிப்புகள் :

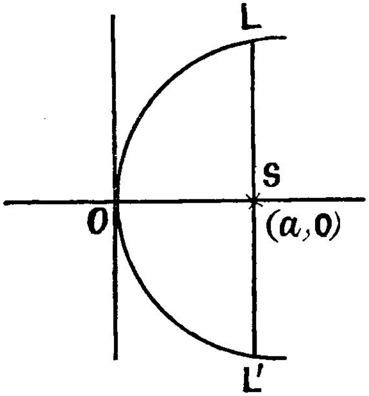
(1) எல்லைகள் கொடுக்கப்படாவிடில் x ஆயம் ஒரு எல்லையாக அமைந்தால் (bounding axis), வளைவரையின் சமன்பாட்டையும், x ஆயத்தின் சமன்பாடாகிய $y = 0$ ஐயும் தீர்த்துக் கீழ் மேல் எல்லைகளைக் காணலாம்.

(2) y ஆயம், ஒரு எல்லையாக (bounding axis) ஆக அமைந்து, $x = f(y)$ வளைவரையின் சமன்பாடாகவிருந்து, $y = c, y = d$ தொகைக்குக் கீழ்மேல் எல்லைகளாகவிருந்தால்

$$\text{பரப்பு} = \int_c^d x\,dy.$$

மாதிரி 1.

$y^2=4ax$ என்ற வளைவரைக்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கு முள்ளே (latus rectum) இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.



படம் 13

வேண்டிய பரப்பு = OLSL′

$$= 2 \,.\, x \text{ பரப்பு } OSL$$

$$A = 2 \int_0^a y\, dx$$

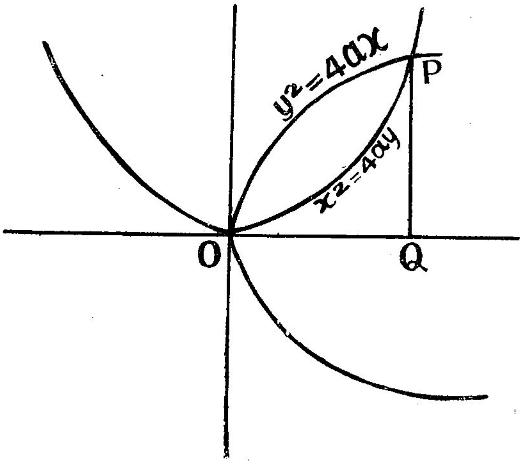
$$= 2 \int_0^a \sqrt{4ax}\, dx$$

$$= 4\sqrt{a} \,.\, \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)_0^a$$

$$= \frac{8a^2}{3} \text{ ச. அலகுகள்.}$$

மாதிரி 2.

$y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்ற இரு வளைவரைகளுக்குப் பொதுவாக உள்ள பரப்பைக் காண்க.



படம் 14

இவ்விரண்டு வளைவரைகளும் P என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$$

$$x^4 - 64a^3 x = 0$$

$$x(x^3 - 64a^3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{அல்லது} \quad x = 4a.$$

பொதுவாக உள்ள பரப்பு

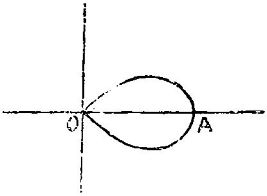
$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\, dx - \int_0^{4a} \frac{x^2}{4a}\, dx$$

$$= 2\sqrt{a}\,.\left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3} \text{ ச. அ.}$$

மாதிரி 3.

$ay^2 = x^2(a - x)$ என்ற வளைவரை ஏற்படுத்தும் வளையத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 15

வளைவரையில், y க்கு $-y$ போட்டால், மாறுதல் இல்லை. ஆகவே வளைவரை x அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றதாகவிருக்கும். $y = 0$ வுடன் வளைவரையின் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தால் $x = 0$

$x=a$, என்ற x-ஆயத் தொலைகளைப் பெற்ற புள்ளிகளில் வளைவரை x அச்சைக் கடந்து வளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

வளையத்தின் பரப்பு $= 2\int_0^a y\,dx$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx$$

$a - x = u^2$ என்க.

$-dx = 2u\,du.$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\int (a-u^2)\,.\,u\,(-2u\,du)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\int_{\sqrt{a}}^{0} -2u^2(a-u^2)\,du$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} (u^2\,.\,a-u^4)\,du$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a}}\left[a\,.\left(\frac{u^3}{3}\right)-\frac{u^5}{5}\right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a}}\left[a\,.\frac{a^{3/2}}{3}-\frac{a^{5/2}}{5}\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a}}\left[\frac{5a^{5/2}-3a^{5/2}}{15}\right]$$

$$= \frac{8a^{5/2}}{\sqrt{a}\,.\,15} = \frac{8a^2}{15}$$ ச. அலகுகள்.

பயிற்சி 41

1. கீழ்க் காணும் வளைவரைகளில் ஏற்படும் வளையங்களின் பரப்பைக் காண்க.

(i) $y^2 = x^2 (2 - x)$

(ii) $y^2 = (x + 1)(x - 2)^3$

(iii) $2y^2 = (1 - x)(1 + 2x)^2$

(iv) $y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0$

(v) $9y^2 = x(3 - x)^2$

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க.

3. x அச்சுக்கும், $y = \sin x$ என்ற வளைவரைக்கும் இடையே ஏற்படும் ஒரு முழுவில்லின் பரப்பைக் காண்க.

4. $y^2 = 2x$, $x^2 = 3y$ என்ற இரு பரவளையத்திற்குப் பொதுவாக உள்ள பரப்பைக் காண்க.

5. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $y = 2x - 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள பரப்பைக் காண்.

6. $(y-1)^2 = 4x$, $x^2 = 4(y-1)$ என்ற இரு பரவளையத்திற்கும் பொதுவாக உள்ள பரப்பைக் காண்க.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில், $x = c$ என்ற நேர் கோட்டினால் பிரிக்கப்பட்ட இரு பகுதிகளின் பரப்பைக் காண்க.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில், $y = c$ என்ற நேர் கோட்டால் பிரிக்கப்படும் இருபகுதிகளின் பரப்பைக் காண்க.

9. $y^2 = 4a(x+a)$, $y^2 = 4b(b-x)$ என்ற இரு பரவளையத்திற்குப் பொதுவாக உள்ள பரப்பு $\frac{8}{3}(a + b) \cdot \sqrt{ab}$ எனக் காண்க.

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ என்ற இரு நீள்வட்டங்களுக்குப் பொதுவாக உள்ள பரப்பைக் காண்க.

11. $y(x^2+4a^2)=8a^3$ என்ற வளைவரைக்கும் அதன் ஈற்றணுகிக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

3·2 சுற்றுதலால் அடையப்பெறும் திடப்பொருள் (volume of solid of revolution).

இரண்டு குத்தாயங்களால் அடைபட்ட ஒரு வளைவரையின் பகுதி (படம் 12), x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால், ஓர் உருளை ஏற்படும். அவ்வுருளையின் பருமத்தைக் காண முற்படுகிறோம்.

படத்தில் PQVT என்ற பகுதி x அச்சைச் சுற்றுவதால், நுண் பகுதிப்பருமம் $= \pi y^2 . \triangle x$.

சுற்றும் பரப்பு $x=a$, $x=b$ என்ற இரு குத்தாயங்களுக்கிடையே அடைபட்டுள்ளது.

$$\therefore \text{ பருமம் } = \int_a^b \pi y^2\, dx$$

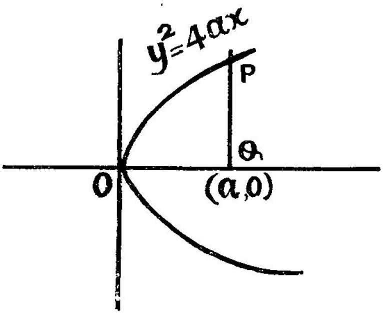
$$= \pi \int_a^b y^2\, dx \text{ க. அ.}$$

குறிப்பு: y அச்சை, குறிப்பிட்ட பரப்பு அதாவது $y=c$, $y=d$ நெட்டாயங்களுக்கிடையே வளைவரைக்குட்பட்டுள்ள பரப்பு சுற்றினால்

$$\text{பருமம்} = \pi \int_c^d x^2\, dy \text{ க. அ.}$$

மாதிரி 1.

ஆய ஆதி முதல் $x=a$ என்ற குத்தாயம் வரை x அச்சுக்கும், $y^2=4ax$ க்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு, x அச்சை ஒரு முறை சுற்றுகிறது. சுற்றுதலால் அடையப்பெறும் திடப் பொருளின் பருமம் காண்க.



படம் 16

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

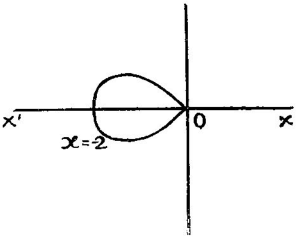
$$= \pi \int_0^a 4ax\, dx$$

$$= 4a\pi \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^a$$

$$= \overset{2}{\not{4}}a\pi \cdot \frac{a^2}{\not{2}} = 2\pi a^3 \text{ க. அ.}$$

மாதிரி 2.

$y^2 = x^4 (x+2)$ என்ற வளைவரையில் ஏற்படும் வளையம் x அச்சைச் சுற்றினால் உண்டாகும் சுற்றுதலால் அடையப் பெறும் திடப்பொருளின் பருமம் என்ன ?



படம் 17

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} x^4 (x+2) \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} (x^5 + 2x^4) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} \right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{32\pi}{15} \text{ க. அலகுகள்.}$$

மாதிரி 3.

$x = t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$ என்ற வளைவரையில் ஏற்படும் வளையம் x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் காண்க.

x அச்சைச் சுற்றுகிறது. எல்லைகளைக் காண,

$$y = 0, \; y = t - \frac{t^3}{3}$$

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

$$t - \frac{t^3}{3} = 0$$

$$3t - t^3 = 0$$

$$t\,(3 - t^2) = 0$$

$$t = 0, \sqrt{3}.$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right)^2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right)^2 . 2t . dt$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 + \frac{t^6}{9} - \frac{2t^4}{3}\right) 2t\, dt$$

$$= \frac{2\pi}{9} \int_0^{\sqrt{3}} (9t^2 + t^6 - 6t^4)\, t\, dt$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left[9 \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{8} - 6 \cdot \frac{t^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left[\frac{81}{4} + \frac{81}{8} - 27\right]$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left[\frac{162 + 81 - 216}{8}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left[\frac{27}{8}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} \text{ க. அ.}$$

பயிற்சி 42

1. ஒரு கோளத்தின் பருமமும், ஒரு வட்ட மட்ட (right circular) கூம்பின் பருமமும் காண்க.

2. $y = \sin x$ ன் ஒரு முழுவில் x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் என்ன ?

3. ஒரு கோளத்தின் பகுதி வெட்டப்பட்டது. உயரம் h. அதன் வட்ட மட்டத்தின் அரை விட்டம் c. அதன் பருமம் $\frac{\pi h}{6}(3c^2 + h^2)$ என நிறுவுக.

4. கீழ்க்கண்ட பரப்பு x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினல் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் காண்க.

(i) $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ ஒரு முழுவில்.

(ii) $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$, வளையம்.

5. முதல் நாற் கூறிலுள்ள, நாற் கூர் விண்மீன் $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றி வரும் பொழுது ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் என்ன ?

6. $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்ற நீள் வட்டம், x அச்சைச் சுற்றினல் பெறப்படும் திடப்பொருளின் பருமம் என்ன ?

7. $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டம், y அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினல் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமம் என்ன ?

8. பரவளையத்தில் செவ்வகலத்தால் துண்டிக்கப்பட்ட பகுதி (i) செவ்வகலத்தைச் சுற்றி (ii) பரவளையத்தின் அச்சைச் சுற்றி வருகையில் ஏற்படும் திடப்பொருளின் பருமங்களைக் காண்க.

3·3. சுற்றுதலால் அடையப்பெறும் திடப் பொருளின் புறப் பரப்பு (Surface area of solid of revolution).

படம் (12) பார்க்கவும். படத்தில் PQ என்ற வில், x அச்சைச் சுற்றும்பொழுது

நுண்பகுதிப் பரப்பு $= 2\pi y \, . \, \triangle s$ ஆகும்.

$$\text{முழுப்புறப்பரப்பு} = \int 2\pi y \, . \, ds$$

$$= \int 2\pi y \frac{ds}{dx} \, . \, dx$$

$$= 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx$$

$$= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx$$

மாதிரி 1.

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டம், x அச்சைச் சுற்றுவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் புறப்பரப்புக் காண்க.

$$S = 2\pi \int_{-a}^{+a} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx$$

$$= 2\pi \times 2 \int_0^a y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$$= 4\pi \int_0^a a \, . \, dx$$

$$= 4\pi a \, (x)_0^a$$

$= 4\pi a^2$ ச. அலகுகள்

பயிற்சி 43

1. பின் குறிப்பிட்ட வளைவரைகள் x அச்சை ஒருமுறை சுற்றினால் ஏற்படும் திடப்பொருள்களின் புறப்பரப்பு காண்க.

(i) $3ay^2 = x(x-a)^2$ – ஒரு வளையம்

(ii) $y^2 = 4ax$, $x=0$ முதல் $x=a$ வரை.

(iii) $y = c \cosh \frac{x}{c}$, $x=0$ முதல் $x=c$ வரை

(iv) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ – முழுவில்

2. $x=t^2, y=t-\frac{t^3}{3}$ என்ற வளைவரையில் அமையும் வளையம் x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் திடப் பொருளின் புறப்பரப்பு 3π எனக் காண்க.

3·4. வளைவரையின் நீளங்கள் (Lengths of curves).

படம் (12) பார்க்கவும். PQ வளைவரையின் நுண்பகுதி $= \triangle S$.

$\therefore$ வளைவரையின் நீளம் $= \int ds$
(உரிய எல்லைகளுக்கிடையில்)

$$= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, .\, dx \, . \qquad ,,$$

வளைவரையின் சமன்பாடு, 'θ' அல்லது 't' என்ற மாறியின் வாயிலாகக் கொடுக்கப்பட்டால், அதாவது $x = f(t)$ $y=\phi(t)$ என்பதானால்,

$$\text{வளைவரையின் நீளம்} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

உரிய எல்லைகளுக்கிடையில் தொகை காணவேண்டும்.

மாதிரி 1.

$x = 0,\ x = \frac{\pi}{3}$ என்ற எல்லைகளுக்குள் $y=\log\cos x$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தைக் காண்க.

$$y = \log \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan x$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$$

$$\text{வில்லின் நீளம்} = \int_0^{\pi/3} \sec x\, dx$$

$$= [\log(\sec x + \tan x)]_0^{\pi/3}$$

$$= \log(2+\sqrt{3})$$

மாதிரி 2.

$x = e^{\theta}\sin\theta$, $y = e^{\theta}\cos\theta$ என்ற வளைவரையில் $\theta = 0$ முதல் $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற எல்லைகளுக்குள் அமையும் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

$$x = e^{\theta}\sin\theta\,;\ \frac{dx}{d\theta} = e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}\sin\theta$$

$$y = e^{\theta}\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = e^{\theta}(-\sin\theta) + e^{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2\left(e^{2\theta}\cos^2\theta + e^{2\theta}\sin^2\theta\right)}$$

$$= \sqrt{2}\,.\,e^{\theta}$$

$$\text{வில்லின் நீளம்} = \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{d\theta}\,.\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{\theta}d\theta$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$$

பயிற்சி 44

1. $y = \log\sec x$ என்ற வளைவரையில் $x = 0$ முதல் $x = \pi/3$ வரை அமையப்பெறும் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

2. $4y^2 = (x+2)^3$ என்ற வளைவரையில் $x = 2$ முதல் $x = 7$ வரை உள்ள வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

3. $9ay^2 = x(x-3a^2)$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

4. $3ay^2 = x(x-a)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

5. $x^3 = y^2$ என்ற வளைவரையில் $x=0$ முதல் $x=1$ என்ற எல்லைகளுக்குள் அமையப்பெறும் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

6. நாற்கூர் விண்மீன் $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ன் முழு நீளத்தைக் காண்க.

7. $\theta=0$ முதல் $\theta=\pi$ என்ற எல்லைக்குள் அடங்கிய வில்லின் நீளம் காண்க. வளைவரையின் சமன்பாடு

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$$

$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$ எனக் கொள்க.

4. புவிஈர்ப்பு மையம்
(Centre of gravity)

புவிஈர்ப்பு மையத்தை $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்று நிலைப்பொருளியலில் பெயரிட்டு,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r\, x_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}$$

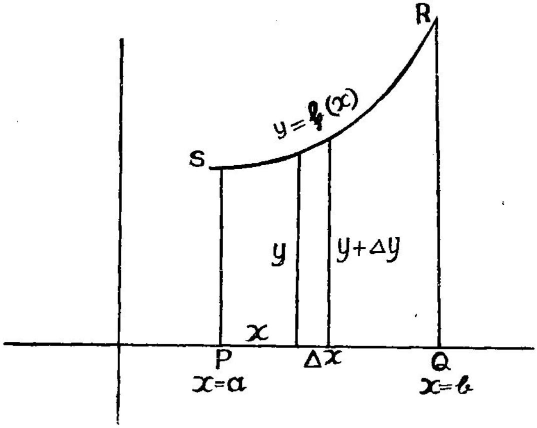
$$\bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r \cdot y_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}$$ எனவும் கண்டோம்.

இங்கு $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ என்பவை தனித்தனிப் பொருள்களாக விறைப்பாக இணைக்கப்பட்ட ஒரு பொருண்மை கூட்டம். அவைகள் தனித்தனிப் பொருண்மைகளாக வல்லாமல் தொடர்ச்சியான பரப்பு, பருமம், புறப்பரப்பு, நீளம் உள்ள ஓரே பொருண்மையாக இருக்குமானால், Σ என்பது $\int$, வரையறுத்த தொகையாகக் கொள்ளப்படும்.

ஆகவே, $$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$$ (குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள்)

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$$

பு. ஈ. மையம் காணும் முறை :



படம் 18

$x = a$, $x = b$ குத்தாயக் கோடுகளுக்கும் x அச்சுக்கும், $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு PQRS. RS வளைவரை கோட்டின் நீளம்.

(i) பரப்பு PQRS ன் பு. ஈ. மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$

நுண்பகுதிப் பரப்பு $= y \,.\, \Delta x$.

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= \mathrm{P} \,.\, y \,.\, \Delta x = \Delta m$.

நுண் பொருண்மையின் பு. ஈ. மையம் $\left.\right\}$ $x = x$, $y = \dfrac{y}{2}$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b xy\,\mathrm{P}\,.\,dx}{\int_a^b y\,\mathrm{P}\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b .\,\frac{y}{2}\,.\,y\,.\,\mathrm{P}\,dx}{\int_a^b .\,y\,\mathrm{P}\,dx}$$

(ii) பரப்பு PQRS, x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளைப் பருமத்தின் பு. ஈ. மையம்:

நுண் பகுதிப் பருமம் $= \pi y^2 . \triangle x$.

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= P . \pi y^2 . \triangle x = \triangle m$.

நுண் பகுதிப் பொருண்மையின் பு. ஈ. மையம் $\left.\right\}$ $x = x$, $y = 0$.

(உருளையின் பருமம் x–அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றது).

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b \pi y^2 . dx . P . x}{\int_a^b \pi y^2 \, dx . P}$$

$\bar{y} = 0$.

(iii) பரப்பு PQRS, x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளையின் புறப்பரப்பு :

நுண் பகுதிப் புறப் பரப்பு $= 2\pi y . \triangle s$

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= 2\pi y \, P . \triangle s$

நுண் பகுதிப் பொருண்மையின் பு. ஈ. மையம் $\left.\right\}$ $x = x$, $y = 0$.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b 2\pi y . x \, P . ds}{\int_a^b 2\pi y \, P \, ds}$$

$\bar{y} = 0$. ($\because$ x அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது).

(iv) வளைவரை நீளம் RS.

நுண் பகுதி நீளம் $= \triangle s$

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= P \triangle S$

நுண் பகுதிப் பொருண்மையின் பு. ஈ. மையம் $\left.\right\}$ $x = x$, $y = y$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b . x\,P\,ds}{\int_a^b P\,ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y\,P\,ds}{\int_a^b P\,ds}$$

மாதிரி 1.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையம், x அச்சு, செவ்வகலம் இவைகளுக்கிடையே அமைந்துள்ள பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காண்க:

x அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றிருப்பதால் பு. ஈ. மையம் x அச்சின் மேல் அமையும். ஆகவே $\bar{y} = 0$.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\,y\,dx}{\int_0^a y\,dx} \quad [\text{ P ஒரு மாறிலி }]$$

$$= \frac{\int_0^a x\,.\sqrt{4ax}\,.\,dx}{\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x^{3/2}\,dx}{\int_0^a x^{1/2}\,dx} = \frac{\left(\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right)_0^a}{\left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)_0^a}$$

$$= \frac{3a}{5}$$

$\therefore$ புவி ஈர்ப்பு மையம் $= \left(\frac{3a}{5}, 0\right)$.

மாதிரி 2.

அரைக் கோளப் பருமத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையமும், அரைக் கோளத்தின் புறப்பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையமும் காண்க.

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் கால் பகுதியை அதை அடக்கும் ஆரையை அச்சாக வைத்துச் சுற்றினால் அரைக் கோளம் கிடைக்கும்.

(i) அரைக்கோளப் பருமத்தின் பு. ஈ. மையம்.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi y^2\, dx}{\int_0^a y^2\, dx} = \frac{\int_0^a x(a^2 - x^2)\, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}$$

$$= \frac{\left[a^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{3a}{8}$$

$\bar{y} = 0.$

$\therefore$ புவி. ஈமையம் $= \left(\frac{3a}{8}, 0\right)$

(ii) அரைக் கோளப் புறப் பரப்பின் பு. ஈ. மையம் :

வட்டக் கால்பகுதியின் வில் x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் அரைக் கோளத்தின் புறப் பரப்பு (உள்ளீடற்ற அரைக் கோளம்) கிடைக்கும்.

$$\bar{x} = \frac{\int xy\, ds}{\int y\, ds}.$$

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad ds = a\,d\theta.$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} a\cos\theta \,.\, a\sin\theta \,.\, a\,d\theta}{\int_0^{\pi/2} a\sin\theta \cdot a\,d\theta}$$

$$= a\,.\frac{\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}} = \frac{a}{2}$$

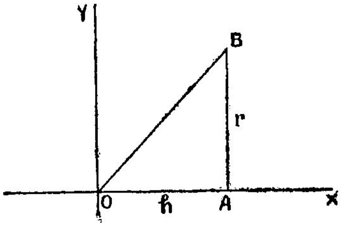
$$\bar{y} = 0.$$

$\therefore$ பு. ஈ. மையம் $= \left(\frac{a}{2}, 0\right)$

மாதிரி 4.

வட்டமட்டக் கூம்பின் பருமத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையமும், வட்டமட்டக் கூம்பின் புறப் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையமும் காண்க.

(i) வட்டமட்டக் கூம்பின் பருமத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம்.



படம் 19

OAB என்பது ஒரு செங்கோண முக்கோணம். $AB = r$; $OA = h$. OAB என்று பரப்பு x அச்சைச் சுற்றினல் வட்டமட்டக் கூம்பின் பருமம் கிடைக்கும்.

OB ன் சமன்பாடு $y = \frac{r}{h} . x.$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h xy^2\,dx}{\int_0^h y^2\,dx} = \frac{\int_0^h x^3\,dx}{\int_0^h x^2\,dx} = \frac{3}{4}h.$$

$$\bar{y} = 0.$$

பு. ஈ. மையம் $= \left(\frac{3h}{4}, 0\right)$

(ii) உள்ளீடற்ற கூம்பு OB என்ற நேர்கோடு x அச்சைச் சுற்றுவதால் ஏற்படும்.

OB ன் சமன்பாடு $y = \frac{r}{h} . x.$

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x . \frac{r}{h} . x . \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} . dx}{\int_0^h \frac{r}{h} . x . \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} . dx}$$

$$= \frac{\int_0^h . x^2\,dx}{\int_0^h x\,dx} = \frac{\frac{h^2}{3}}{\frac{h^2}{2}}$$

$$= \frac{2h}{3}.$$

$$\bar{y} = 0.$$

$\therefore$ பு. ஈ. மையம் $= \left(\frac{2h}{3}, 0\right)$

பயிற்சி 45

1. $y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்ற கயிற்று வளையத்தில் ஆதிமுதல் (x, y) என்ற புள்ளிவரை உள்ள வில்லின் புவி ஈர்ப்புமையம் காண்க.

2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைவரையில் முதற்கால் பகுதியிலுள்ள வில்லின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

3. 'a' ஆரையுள்ள அரைவட்டப் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தில் கால்பகுதியின் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

5. $y^2 = 4x^2 - x^3$ என்ற வளைவரையில் வளையத்தின் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

6. $y = \sin x$ ன் ஒரு முழுவில்லின் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

7. உருள்வளை $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ இதன் பரப்பின் பு. ஈ. மையம் காண்க.

8. $y^2 = 2ax$, $x = 0$, $x = a$ இடைப்பட்ட பரப்பு, x அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது. உருளையின் பு. ஈ. மையம் காண்க.

9. $y = a \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ இவைகளின் இடைப்பட்ட பரப்பு x அச்சைச் சுற்றி வருகையில் ஏற்படும் உருளையின் பு. ஈ. மையம் காண்க.

5. நிலைமதிருப்பத்திறன்

(Moment of Inertia)

5·1. வரையறை : m பொருண்மையுள்ள ஒரு நுண் பொருள், ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர் கோட்டிலிருந்து 'r' தூரம் இருக்குமானல் அக்கோட்டை யொட்டி அந்நுண் பொருளின் நிலைமதிருப்பத்திறன் mr^2 என்பது வரையறை.

பலநுண்பொருள்கள் கூட்டமாகிய ஒரு பொருளை யெடுத்துக் கொண்டால் $\sum mr^2$ ஒரு வரையறைப்பட்ட தொகை (Definite Integral) ஆகும். $\triangle M$ ஒரு நுண்பகுதிப் பொருண்மை.

$$\therefore \quad \sum mr^2 = \sum \triangle M \cdot r^2$$
$$= \int r^2 \, dM.$$

(உரிய எல்லைகளுக்குட்பட்டது)

பொதுவாக, OX என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சாகி, M என்ற பொருண்மையின் நிலைம திருப்பத்திறன் MK^2 ஆகும். K என்பது அந்த அச்சையொட்டி அப்பொருளின் சுழியாரை (radius of gyration) எனச் சொல்வார்கள்.

சில முக்கிய குறிப்புகள் :

(i) நாம் கம்பியின் நிலைம திருப்பத்திறன் கண்டுபிடிக்குங்காலையில், நுண்பகுதிப் பொருண்மை $= \triangle x \cdot P$. இங்கு P செறிவை அல்லது அடர்த்தியைக் குறிக்கும். $\triangle x$ நுண்பகுதி நீளத்தைக் குறிக்கும்.

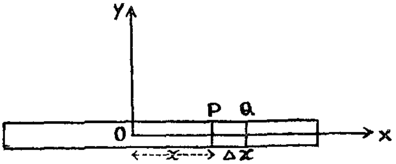
(ii) ஒரு பரப்பின் நிலைம திருப்பத்திறன் காணும் காலையில், நுண்பகுதிப் பொருண்மை = $y . \triangle x . P$. இங்கு $y\triangle x$ x அச்சை ஒட்டி ax, $x+\triangle x$ குத்தாயங்களுக்கிடையே உள்ள நுண்பகுதிப் பரப்பைக் குறிக்கும்.

(iii) உருளைப் பருமத்தின் நிலைம திருப்பத்திறன் காணும் காலையில், நுண்பகுதிப் பொருண்மை = $\pi y^2 \triangle x . P$.

(iv) உருளையின் புறப்பரப்பின் நிலைம திருப்பத்திறன் காணும் காலையில் நுண்பகுதிப் பொருண்மை = $2\pi y \triangle S$.

மாதிரி 1.

ஒரு நேர்க்கம்பி நீளம் $2a$. பொருண்மை M . அச்சு கம்பியின் மையத்தின் வழியாக கம்பிக்குச் செங்குத்தானது. அவ்வச்சை ஒட்டி நிலைம திருப்பத்திறன் காண்க.



படம் 20

கம்பியின் மையப்புள்ளியே ஆதியாகும். நுண்பகுதிப் பொருண்மை = $\triangle x . P$

$$\left.\begin{array}{l}\text{நுண்பகுதிப் பொருண்மையின் OY ஐ ஒட்டி}\\ \text{நிலைம திருப்பத்திறன்}\end{array}\right\} = \triangle x . P . x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{கம்பியின் மொத்த பொருண்மையின் OY ஐ}\\ \text{ஒட்டி நிலைம திருப்பத்திறன்}\end{array}\right\} = \sum x^2 P . \triangle x$$

$$= \int_{-a}^{+a} x^2 P . dx$$

$$= \frac{2}{3} . a^3 P.$$

M கம்பியின் மொத்த பொருண்மை ஆனல் $M = 2a$ P.

OY ஐ ஒட்டி கம்பியின் நிலைம திருப்பத்திறன் $= \frac{M \cdot a^2}{3}$

குறிப்பு: மேலே குறிக்கப்பட்ட மாதிரிக் கணக்கில், அச்சு கம்பியின் ஒரு முனை வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தாக அமைந்தால், அவ்வச்சையொட்டி நிலைம திருப்பத்திறன் காண்க.

இங்கு $AP = x$ எனக் கொள்க.

$$\text{நி. தி. தி.} = P\int_0^{2a} x^2\,dx$$

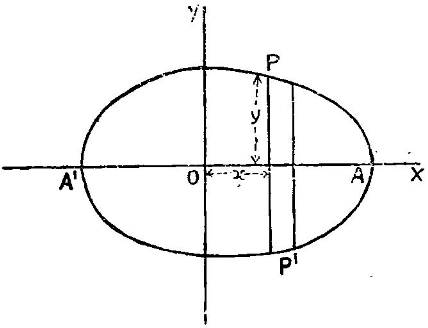
$$= P \cdot \frac{8a^3}{3}$$

$$= \frac{M}{2a} \cdot \frac{8a^3}{3}$$

$$= \frac{4\,Ma^2}{3}$$

மாதிரி 2.

நீள் வட்ட வடிவமுள்ள தகட்டின் நெட்டச்சை ஒட்டி நிலைம திருப்பத்திறன் காண்க.



படம் 21

நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

O விலிருந்து x தூரத்தில் நுண் பகுதியிருக்கட்டும்.

நுண்பகுதியின் பொருண்மை $= 2y \,.\, \triangle x \,.\, \text{P}.$

OX ஐ ஒட்டி நி. தி. தி. $= 2y \,.\, \triangle x \,.\, \text{P} \,.\, \frac{y^2}{3}$

OX ஐ ஒட்டி தகட்டின் நி. தி. தி. $= \frac{2}{3}\,\text{P}\int_{-a}^{+a} y^2\,dx.$

$$= \frac{2}{3}\,\text{P} \,.\, 2\int_{0}^{a} y^3\,dx$$

$$x = a\cos\theta\,;\quad y = b\sin\theta$$

$$= \frac{4}{3}\,\text{P}\,ab^3\int_{0}^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\,\text{P}\,ab^3 \,.\, \frac{3}{4} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

$$= \text{M} \,.\, \frac{b^2}{4}\quad [\because\quad \text{M} = \pi ab\,\text{P}].$$

குறிப்பு :

(1) குட்டச்சை ஒட்டி நீள் வட்டத் தகட்டின் நி. தி. தி. $= \frac{\text{M}a^2}{4}$

(2) ஆரை 'a' உடைய வட்டவடிவமான தகட்டின் அதன் விட்டத்தை ஒட்டிய நி. தி. தி. $= \frac{\text{M}a^2}{4}$

கவனிப்புக்குரிய இரு முக்கிய தேற்றங்கள் :

தேற்றம் 1 : ஒரு போகு அச்சுத் தேற்றம் (Theorem of Parallel Axes) : ஏதாமொரு அச்சை ஒட்டி ஒரு விறைப்பான பொருளின் நிலைமத் திருப்பத்திறன் = புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியாகச் செல்லும், அச்சின் ஒரு போகுக் கோட்டை ஒட்டிக் கணிக்கப்படும் நிலைம திருப்பத்திறன் + கொடுக்கப்பட்ட

அச்சை ஒட்டி புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வைக்கப்பட்ட பொருளின் நிலைம திருப்பத்திறன் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$2a$ நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின், அதன் ஒரு நுனியில் அதன் நீளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கோட்டை ஒட்டி அதன் நிலைமதிருப்பத்திறன்

$$= M \cdot \frac{a^2}{3} + Ma^2$$

$$= M \cdot \frac{4a^2}{3}$$

தேற்றம் 2 : செங்குத்தச்சுகள் தேற்றம் (Theorem of Perpendicular Axes).

I_x, I_y என்பவை, O_x, O_y என்ற இரண்டு செங்குத்தச்சுகளை ஒட்டி ஒரு தகட்டின் நிலைம திருப்பத்திறன்களாகவிருந்தால், O வழியாகத் தகட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சை ஒட்டி அதன் நிலைம திருப்பத்திறன் $= I_x + I_y$.

(இவ்விரண்டு தேற்றங்களின் தெரிப்புகள் இங்கு வேண்டியதில்லை).

எடுத்துக்காட்டாக,

நீள் வட்டத் தகட்டின் மையத்தின் வழியாகச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சை ஒட்டி கண்டுபிடிக்கும் நிலைம திருப்பத்திறன் = அதன் நெட்டச்சு, குட்டச்சுகளை ஒட்டி கண்டுபிடிக்கும் நிலைம திருப்பத்திறன்களின் கூடுதல் $= \frac{Ma^2}{4} + \frac{Mb^2}{4}$.

பயிற்சி 46

1. $2a$, $2b$ பக்கங்கள் உள்ள ஒரு நீண்ட சதுரத்தின் பொருண்மை, M. கீழ்க்கண்ட அச்சுகளை ஒட்டி அதின் நி. தி. தி. காண்க. G, அந்த நீண்ட சதுரத்தின் பு. ஈ. மையமானால்

(i) $2a$ பக்கத்திற்கு ஒரு போகாக Gx அச்சு

(ii) $2b$ பக்கத்திற்கு ஒரு போகாக Gy அச்சு

(iii) நீண்ட சதுரத்தின் பு. ஈ. மையத்தின் வழியாக அதற்குச் செங்குத்தாக வுள்ள அச்சு Gz.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டப் பரப்பு, குட்டச்சை ஒட்டி, அதைச் சுற்றி வரும் போது ஏற்படும் பருமத்தின் நி. தி. தி. காண்க.

3. $y^2 = 4ax$ என்ற பரப்பு $x = 0$, முதல் $x = h$ வரை. இப்பரப்பு x அச்சைச் சுற்றி வரும் போது ஏற்படும் பருமம். இதற்கு x அச்சை ஒட்டி நி. தி. தி. காண்க.

4. ஒரு புரைக்கோளம் (hollow sphere). அரைவிட்டம் 'a'. பொருண்மை M. அதன் ஏதாமொரு விட்டத்தை யொட்டிய நி. தி. தி. காண்க.

5. ஒரு வட்ட வடிவக்கம்பி. அரைவிட்டம் a; பொருண்மை M. அதன் அம்மட்டத்திலேயே

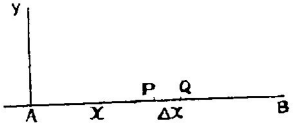
(i) ஏதாமொரு விட்டத்தை ஒட்டி

(ii) ஏதாமொரு தொடுவரையை ஒட்டி

(iii) மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டை ஒட்டி நி. தி. தி. காண்க.

மாதிரி.

ஒரு மெல்லிய கம்பியின் செறிவு ஒரு முனையிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குத் தகவு பொருத்த முடையது. அந்த முனையில் கம்பிக்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு அச்சை யொட்டி அதன் நி. தி. தி. காண்க.



படம் 22

நுண் பகுதி நீளம் = PQ = $\triangle x$.

AP = x.

நுண் பகுதியின் பொருண்மை = $Rx \cdot \triangle x$.

AY அச்சை ஒட்டி நி. தி. தி. = $Kx^3 \triangle x$.

முழு நி. தி. தி. = $K \int_0^{2a} x^3\, dx$

$= 4K \cdot a^4$.

பொருண்மை = $K \int_0^{2a} x\, dx$

$= 2K\, a^2$.

நி. தி. தி. = $2K\, a^2 \cdot 2a^2 = M \cdot 2a^2$.

6. வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Differential Equations)

6·1. மாறு ராசிகளையும், அவைகளின் நுண் கெழுக்களை யும் இணைக்கும் சமன்பாடுகளே வகைக் கெழுச் சமன்பாடு கள் எனப்படும்.

ஒரு சமன்பாட்டில் தோன்றும் வகை நுண் கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) எனப்படும். மிக உயர்ந்த வரிசையின் படியே (degree) அச்சமன்பாட்டின் படியெனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$. இங்கு வரிசை இரண்டு, படி மூன்று என்பதாகும்.

முதல் வரிசை முதற்படி சமன்பாடுகள் (Equations of the first order and first degree).

எல்லா விதச் சார்புகளுக்கும் தொகை காண முடியாது என்றறிந்தோம். அவ்வாறே எல்லாவித வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண முடியாது. குறிப்பிட்ட அமைப்புகளைப் பெற்ற சமன்பாடுகளுக்குத்தான் தீர்வு காணலாம்.

சமன்பாடுகளை நான்கு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

வகை (1) x, y என்ற மாறு ராசிகள் பிரிக்கக்கூடிய வகையில் அமைந்திருப்பவை (Variables Separable).

(2) சமபடித்தான சமன்பாடுகள் (Homogeneous Equations).

(3) சமபடித்தான சமன்பாடுகளாக வில்லாமல், அவைகளைச் சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு மாற்றி அமைக் கக்கூடிய வகையில் அமைந்திருப்பவை (Non homogeneous Equations, reducible to homogeneous form).

வகை (4) சில ஈடுகள் செய்வதால் நேரடியாக மாறு ராசிகளைப் பிரிக்கக்கூடிய தன்மையைப் பெறும் சமன் பாடுகள். (Reducible to Variable Separable by proper substitution).

6·2. வகை (1). மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க: $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0.$

சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களையும் $\tan y\,(1 - e^x)$ ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{e^x\, dx}{1 - e^x} + \frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y} = 0.$$

$$\therefore \int \frac{e^x\, dx}{1 - e^x} + \int \frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y} = \text{மாறிலி}$$

$$-\log(1 - e^x) + \log \tan y = \log C.$$

$$\frac{\tan y}{1 - e^x} = C$$

$$\tan y = C\,(1 - e^x).$$

மாதிரி 2.

ஒரு வளைவரையில் ஏதாமொரு புள்ளியில் செங் கோட்டடி, x ஆயத்தின் இருபடிக்குச் சமம். வளைவரை (2, 1) என்ற புள்ளிவழியாகச் செல்வதாக விருந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\text{செங்கோட்டடி} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\log y = -\frac{1}{x} + C.$$

வளைவரை (2, 1) ல் செல்வதால்,

$$\log 1 = -\frac{1}{2} + C$$

$$0 = -\frac{1}{2} + C, \quad \therefore \quad C = \frac{1}{2}.$$

∴ வளைவரையின் சமன்பாடு யாதெனில்

$$\log y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

$$\log y + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

வகை (4).

மாதிரி 3.

தீர்வு காண்க: $\frac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$.

$z = 4x + y + 1$ என்க.

$$\frac{dz}{dx} = 4 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - 4 = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 4$$

$$\frac{dz}{z^2+4} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2+4} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{z}{2} = x + C$$

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{4x+y+1}{2} = x + C.$$

பயிற்சி 47

பின் வரும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

1. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$
2. $\sqrt{1+x^2}\,dx + \sqrt{1+y^2}\,dy = 0$
3. $\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x\,dy + y\,dx = 0$
4. $(e^x+1)\,y\,dy + (y+1)\,dx = 0$
5. $\tan y\ \text{sce}^2 x\,dx + \tan x\ \sec^2 y\,dy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y} + x^3 e^{-y}$
7. $y - x\frac{dy}{dx} = b\left(1 + x^2 . \frac{dy}{dx}\right)$
8. $x^2 (y+1)\,dx + y^2 (x-1)\,dy = 0.$

9. $\cos y \, dx + (1+e^{-x}) \sin y \, dy = 0$

கட்டுப்பாடு $x = 0, \quad y = \frac{\pi}{4}$.

10. $(x-y)^2 \cdot \frac{dy}{dx} = a^2$.

11. $\frac{dy}{dx} - x \tan(y-x) = 1$.

12. $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$.

13. $(2x^2+3y^2-7)\, x\, dx - (3x^2+2y^2-8)\, y\, dy = 0$

($x^2 = u$; $y^2 = v$ ஈடு செய்க).

14. $y(xy+1) + x(xy-1)\frac{dy}{dx} = 0$.

15. (3, 4) வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவரையின் வரைகோட்டடி x ஆயத்தொலைக்குச் சமம். அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு யாது?

16. ஒரு ஆகாய விமானத்தின் விசைமாறு வீதம் $g \cos \alpha - kv$; g, k, α மாறிலிகள். $t=0$ ஆனால், $v=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டை யொட்டி v என்னவெனக் காண்க.

17. ஒரு பொருளின் தேய்வு விகிதம் Kx. x அப்பொழுதுள்ள பொருளின் பொருண்மை. சரிபாதி பொருண்மை தேய $\frac{1}{k} \log_e 2$ வினாடிகள் ஆகும் என நிறுவுக.

18. நியூட்டன் குளிர்ச்சி விதிப்படி $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_0)$.

இங்கு T கோளத்தின் மேல் வெட்பநிலை; t கால அளவு. T_0 சூழ்நிலையின் வெட்பநிலை. K ஒரு மாறிலி; $t=0$ ஆனால் $T=T_1$ என்பது கட்டுப்பாடு. இங்கு $T - T_0 = (T_1 - T_0)\, e^{-kt}$ என நிறுவுக.

6.3 வகை 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ என்ற அமைப்பு.

இங்கு $f(x, y)$. $F(x, y)$ என்ற இரண்டு சார்புகளும், x, y என்ற ராசிகளில் ஒத்த சமபடித்தான கோவைகள். இது ஒரு சம படித்தான சமன்பாடு ஆகும் (homogeneous equation).

எடுத்துக்காட்டாக $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ சமபடித்தான சமன்பாடாகும்.

இவ்வகைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண $y = vx$ என ஈடு செய்வோம். v என்பது x ன் சார்பாகும். ஈடாக்கினல்

$$\frac{f(x, y)}{F(x, y)} = \phi(v) \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \phi(v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = \phi(v) - v$$

$$\frac{dv}{\phi(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{\phi(v) - v} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

தீர்வு காணலாம். பின்னர் $v = \dfrac{y}{x}$ ஐ ஈடாக்குவோம். x, y என்ற ராசிகளின் கோவையாகத் தீர்வு கிடைக்கும்.

மாதிரி.

தீர்வு காண்க : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 3x^2 y}{x^3 + 3xy^2}$

$y = vx$ என்பதை ஈடாக்குக.

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3x^3 + 3vx^3}{x^3 + 3v^2x^3}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3+3v}{1+3v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3+3v}{1+3v^2} - v$$

$$= \frac{2v-2v^3}{1+3v^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{(1+3v^2)\,dv}{2v-2v^3} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

தொகைக்குரிய சார்பைப் பகுதி பின்னங்களாகப் போட வேண்டும்.

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+3v^2}{v\,(1-v)\,(1+v)}\,dv = \int \frac{dx}{x} + c.$$

$$1+3v^2 = A\,(1-v)\,(1+v)+Bv\,(1+v)+Cv\,(1-v)$$

$$A = 1$$

$$B = 2$$

$$C = -2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left[\int \left(\frac{1}{v} + \frac{2}{1-v} - \frac{2}{1+v}\right) dv\right] = \int \frac{dx}{x} + c.$$

$$\frac{1}{2}\left[\log v - 2\log(1-v) - 2\log(1+v)\right] = \log x + c.$$

$$\frac{1}{2}\left[\log \frac{v}{(1-v)^2\,(1+v)^2}\right] = \log x + c.$$

$$\log \left[\frac{v}{(1-v)^2\,(1+v)^2}\right]^{1/2} = \log x + c.$$

$$\log \frac{\sqrt{v}}{(1-v)\,(1+v)} = \log x + c$$

$$\log \frac{\sqrt{yx}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)} - \log x = c$$

$$\log \frac{\sqrt{xy}}{x^2 - y^2} = \log k$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{x^2 - y^2} = k \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 48

தீர்வு காண்க :

1. $(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx} = xy$ 2. $(x+y)^2\, dx = 2x^2\, dy$

3. $(y^2 - 2xy)\, dx = (x^2 - 2xy)\, dy$

4. $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, $x=1$ ஆகவிருக்கையில் $y=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டது.

5. $x(y-x)\, dy = (y+x)\, y\, dx$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}$.

7. $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$. 8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

9. $(6x^2+2y^2)\, dx - (x^2+4xy)\, dy = 0$.

10. $(xy - 2y^2)\, dx - (x^2 - 3xy)\, dy = 0$.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$. 12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \sin\frac{y}{x} - y}{x \sin\frac{y}{x}}$.

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left[x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right]}{x\left[y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right]}$.

14. $xdy - y\, dx = \sqrt{x^2+y^2}\, dx$.

15. $xdx + ydy = 2(xdy - ydx)$.

6·4 வகை 3:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$$ என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

$x = X + h,\ y = Y + K$ என்று ஈடாக்குக. $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$.

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY+ah+bK+c}{AX+BY+Ah+BK+C}$$

h, K ஐ $ah + bK + c = 0 \quad Ah + BK + C = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு கணிக்கவும்.

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{AX+BY}$$

இது சமபடித்தான சமன்பாடாகும்.

$Y = vX$ என்பதை ஈடு செய்து முற் கூறிய முறையில் தீர்வு காணமுடியும்.

குறிப்பு: h, k ஐ கணிக்கும் பொழுது $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ ஆகவிருந்தால்,

$$ah + bK + c = 0$$

$$Ah + BK + C = 0$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒன்றுக் கொன்று முரண்பாடாகவிருக்கும். h, k ஐக் காண இயலாது. இந்த நிலையில், $ax + by = v$ என்று ஈடாக்கினல் ராசிகளை நேரடியாகப் பிரிக்கும் வகைக்குட்படும். தீர்வு காணலாம்.

மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$.

இங்கு $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

$x = X + h; \quad y = Y + k$, ஈடு செய்தால்

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y+h+2k-3}{2X+Y+2h+k-3}$$

$$h + 2k - 3 = 0$$

$$2h + k - 3 = 0$$

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க $h=k=1$ என்பதைக் காண்போம். ஆகவே

$$x = X + 1; \quad y = Y + 1 \; \ldots\ldots \; (1).$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y}$$

$Y = vX$ ஐ ஈடாக்கினல்

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{X+2vX}{2X+vX} = \frac{1+2v}{2+v}$$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{1+2v}{2+v} - v$$

$$= \frac{1-v^2}{2+v}.$$

$$\int \frac{(2+v)\,dv}{1-v^2} = \int \frac{dX}{X} + \text{மாறிலி.}$$

இடப்பக்கம் தொகைக் குரியவற்றைப் பகுதி பின்னங்களாக்கி, தொகை காணவேண்டும்.

$$\frac{2+v}{1-v^2} = \frac{A}{1+v} + \frac{B}{1-v}$$

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\int \frac{1}{2}\,\frac{dv}{1+v} + \int \frac{3}{2}\cdot\frac{dv}{1-v} = \int \frac{dX}{X} + \text{மாறிலி}$$

$$\log\,(1+v)^{1/2} - \log\,(1-v)^{3/2} = \log X + \log c$$

$$\log \frac{(1+v)^{1/2}}{(1-v)^{3/2}} = \log cX$$

$$\frac{(1+v)^{1/2}}{(1-v)^{3/2}} = cX$$

$$\frac{1+v}{(1-v)^3} = c^2X^2$$

$$\frac{1+\frac{Y}{X}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3} = c^2\,X^2$$

$$\frac{(X+Y)}{(X-Y)^3}\,.\,X^2 = c^2\,X^2$$

$$\frac{X+Y}{(X-Y)^3} = c^2 = k \text{ என்க.}$$

$$X+Y = x+y-2$$

$$X-Y = (x-y)$$

$$\therefore \quad \frac{x+y-2}{(x-y)^3} = k.$$

$$\therefore \quad x+y-2 = k\,(x-y)^3.$$

மாதிரி 2.

தீர்வு காண்க : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2y+3}{2x-4y+5}$.

இங்கு $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B}$ எனக் கவனிக்கவும்.

$$x - 2y = v \text{ என்க.}$$

x ஐப் பொருத்த வகைக் கெழு கண்டால்

$$1 - 2\,\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad 1 - 2\left[\frac{x-2y+3}{2x-4y+5}\right] = \frac{dv}{dx}$$

(அ. து) $1 - 2\left[\frac{v+3}{2v+5}\right] = \frac{dv}{dx}$

$$\frac{(2v+5) - 2(v+3)}{2v+5} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{1}{2v+5} = \frac{dv}{dx}$$

$$\int (2v+5)\,dv = -\int dx + C$$

$$v^2 + 5v = -x + C$$

$$(x-2y)^2 + 5(x-2y) = -x + C$$

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 5x - 10y + x = C$$

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 10y = C.$$

மாதிரி 3.

தீர்வுகாண்க : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$

இங்கு $a + B = 0$ என்பதைக் காணவும். இந்த மாதிரி யான சமன்பாடுகளை, அவைகளின் உறுப்புகளைச் சீராக அமைப்பதால், தீர்வு காண முடிகிறது.

$$(x - 2y + 1)\,dy = (2x - y + 1)\,dx$$

$$x\,dy + y\,dx - 2y\,dy + dy = 2x\,dx + dx$$

$$d(xy) - 2y\,dy + dy = 2x\,dx + dx$$

$$\int d(xy) - 2\int y\,dy + \int dy = \int 2x\,dx + \int dx + C$$

$$xy - y^2 + y = x^2 + x + C.$$

பயிற்சி 49

தீர்வுகாண்க.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y + 2}{3x - 5y}$

2. $(12x - 5y + 9)\,dx + (5x + 2y - 4)\,dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$ 4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+7y+2}{3x+5y+6}$

5. $(3y-7x+7)\,dx + (7y-3x+3)\,dy = 0$

6. $(x+y+1)\,dx + (3x+4y+4)\,dy = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y+6}{y-x-3}$

8. $(2x+18y-14)\dfrac{dy}{dx} = 6x+5y-7$

9. $(2x-4y+3)\dfrac{dy}{dx} + (x-2y+1) = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+x+1}{4y+2x+3}$.

6·5 நேரிய சமன்பாடுகள் (Linear Equations).

$\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்பது இச்சமன்பாட்டின் அமைப்பு. இங்கு P, Q, x ன் சார்புகள் மாத்திரம் எனக் குறிப்பிடத் தக்கது.

இப்பொழுது, $\dfrac{d}{dx}\left[e^{\int P dx} . y\right]$

$$= e^{\int P dx} . \frac{dy}{dx} + y . e^{\int P dx} . P$$

$$= e^{\int P dx}\left[\frac{dy}{dx} + Py\right]$$

ஆகவே,

$$e^{\int P dx}\left[\frac{dy}{dx} + Py\right] = \frac{d}{dx}\left[e^{\int P dx} . y\right]$$

என்ற பொருத்தமான (exact) வகைக் கெழு பகுதி கிடைக்கிறது.

ஆகவே, $\left[\dfrac{dy}{dx} + Py\right]$ ஐ $e^{\int P dx}$ ஆல் பெருக்கினுல்,

பொருத்தமான வகைக் கெழு கிடைப்பதினால், $e^{\int Pdx}$ க்குத் தொகைப் பெருக்குச் சினை (Integrating factor) எனச் சொல்வோம். ஆகவே $\frac{dy}{dx} + Py = Q$.

இருபக்கங்களையும் $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்க

$$e^{\int Pdx}\left[\frac{dy}{dx} + Py\right] = Qe^{\int Pdx}$$

அதாவது $\frac{d}{dx}\left[Ye^{\int Pdx}\right] = Qe^{\int Pdx}$.

இருபக்கங்களிலும் x ஐ ஒட்டித் தொகை கண்டால்

$$Ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}\,dx + C.$$

இதுதான் தீர்வாகும்.

மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க : $\cos^2 x \,.\, \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} + Y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x.$$

இங்கு $P = \sec^2 x$; $Q = \tan x \sec^2 x$

$$\int Pdx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$e^{\int Pdx} = e^{\tan x}$$

$e^{\tan x}$ தான் தொகை பெருக்குச் சினை.

தீர்வு என்னவென்றால்

$$Ye^{\tan x} = \int e^{\tan x} . \tan x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int e^u\, u\, du \quad [u = \tan x \text{ என்க}]$$

$$= \int u\, d\,(e^u)$$

$$= e^u u - e^u$$
$$= e^u (u - 1)$$
$$= e^{\tan x} (\tan x - 1) + C.$$

மாதிரி 2.

தீர்வுகாண்க :

$$x \cos x \cdot \frac{dy}{dx} + y\,(x \sin x + \cos x) = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x}\right) = \frac{1}{x \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \left(\tan x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \cos x}.$$

இங்கு $P = \tan x + \frac{1}{x}$; $Q = \frac{1}{x \cos x}$

$$\int P dx = \int \left(\tan x + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \log \sec x + \log x$$
$$= \log (x \sec x)$$
$$e^{\int P dx} = e^{\log (x \sec x)} = x \sec x$$

தீர்வு யாதெனில்

$$y \cdot x \sec x = \int \frac{x \sec x}{x \cos x} dx$$
$$= \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$
$$\therefore \quad yx \sec x = \tan x + C.$$

பயிற்சி 50

1. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos^3 x.$

2. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$

3. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}.$

4. $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2 y}{1+x^3} = \frac{1+x^2}{1+x^3}.$

5. $\dfrac{dy}{dx} - y \tan x = e^x \sec x.$ 6. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2.$

7. $x(x-1)\dfrac{dy}{dx} - (x-2)y = x^2(2x-1).$

8. $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = (1 + \sin^2 x) \sin 2x.$

9. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2} \cdot x.$

10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x \log x} = \dfrac{\sin 2x}{\log x}.$

11. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - xy = e^x (x+1)^{n+1}.$

12. $\dfrac{dy}{dx} + (y-1)\cos x = e^{-\sin x} \cot^2 x.$

13. $(1+y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy.$

14. $1 + (x \tan y - \sec y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

15. $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = 2 \log x.$

6·6 பர்னௌலியின் அமைப்பு :

$\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$. இங்கு P, Q x ஐ மாத்திரம் ஒட்டிய சார்புகள் ஆகும். இருபக்கங்களையும் y^n ஆல் வகுத்து வலப் பக்கத்தில் x ஐ மாத்திரம் ஒட்டிய சார்பு இருக்குமாறு மாற்ற வேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \cdot y^n.$$

இருபக்கங்களையும் y^n ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{P}{y^{n-1}} = Q$$

$$\frac{1}{y^{n-1}} = v \text{ என்க.}$$

$$-\frac{(n-1)}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

$$\frac{dv}{dx} - P(n-1)v = -Q(n-1)$$

இது, v, x ல் திட்ட அமைப்பைப் பெற்று நேரிய சமன்பாடு தீர்க்கும் முறையில் தீர்வைக் காணலாம்.

மாதிரி 1.

தீர்வுகாண்க : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$

இரு பக்கங்களையும் $y (\log y)^2$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{y(\log y)^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log y} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\log y} = v \text{ என்க.}$$

$$-\frac{1}{(\log y)^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

இங்கு $P = -\frac{1}{x}$.

$$\int P\,dx = \int -\frac{dx}{x} = -\log x$$

$$e^{\int P\,dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

தீர்வு யாதெனில்

$$ve^{\int P\,dx} = \int -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{v}{x} = -\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$\frac{1}{x\log y} = \frac{1}{2x^2} + c.$$

பயிற்சி 51

தீர்வு காண்க :

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}.$ 2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{x^2+1}\cdot y = \dfrac{y^2}{x+1}.$

3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^4 \cdot y^5.$ 4. $\dfrac{dy}{dx} + xy = y^2 \sin x.$

5. $2\,.\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}.$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = y^n \,.\, \sin 2x - y\cos x.$

7. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3 \,.\, y^2.$ 8. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$

9. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)\,e^x \,.\, \sec y.$

10. $\dfrac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\cos^2 y.$

11. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}.$ 12. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = x\sqrt{y}.$

13. $a\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{x}{y^{n-1}}.$ 14. $x^2 - y^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0.$

15. $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \dfrac{\sin x\,.\,\cos^2 x}{y^2}.$

6·7. இருவரிசை முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடு. (Linear Differential Equation of the Second order).

இதன் உருவம் $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\,.\dfrac{dy}{dx} + c = X$ (1)

என்பதாகும். இங்கு a, b, c மாறிலிகள். X x ஐப்

பொறுத்த சார்பு.

ஆனல் முதலில் $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + c = 0$ (2)

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க, $y = e^{mx}$ என்றதீர்வை (m ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு) எடுத்துக் கொள்வோம். $\dfrac{dy}{dx} = me^{mx}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$ ஆகிறது. இவைகளைச் சமன்பாட்டில் ஈடாக்கினல்

$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ ஆகும்.

m ன் மதிப்புகளை $am^2 + bm + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் காணலாம். இந்த m ஐப் பொருத்த சமன்பாட்டிற்கு உதவிச் சமன்பாடு (auxiliary equation) என்று பெயர்.

m ன் மதிப்புகள் மூன்று வகைப்படும்.

(i) உதவிச் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மெய்யானதும் வெவ்வேருனதுமான மதிப்புகள் இருக்கட்டும். அவைகளை m_1, m_2 எனக் கொள்வோம். $\therefore$ $y = e^{m_1x}$, $y = e^{m_2x}$ இவை இரண்டும், சமன்பாடு (2) ன் தீர்வுகள்.

ஆகவே Ae^{m_1x}, Be^{m_2x} இரண்டும் (2) ன் தீர்வுகள்.

ஆகவே, $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ (2) வது சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுத் தீர்வு ஆகும். ஏனென்றல், சமன்பாட்டின் வரிசைக் குகந்த முறையில், இரண்டு மாறிலிகள் அமைந்துள்ளன.

(ii) உதவிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாக விருந்து, சமமானல், அதாவது $m_2 = m_1$ ஆனல்,

$y = (Ax + B)\,e^{m_1x}$ என்பது மிகப் பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

(iii) உதவிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் கற்பனையாக விருந்தால், அதாவது $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$ (∴ கற்பனை மூலங்கள் ஜோடியாகத்தான் வரும்), அப்பொழுது

$$y = e^{\alpha x} [\mathrm{C} \cos \beta x + \mathrm{D} \sin \beta x]$$

அல்லது $y = e^{\alpha x} . \mathrm{A} \cos (\beta x + \gamma)$.

மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க : $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$.

உதவிச் சமன்பாடு யாதெனில்

$$m^2 - 6m + 8 = 0$$
$$(m - 4)(m - 2) = 0$$
$$m = 4, 2.$$
$$\therefore \quad y = \mathrm{A}e^{4x} + \mathrm{B}e^{2x}.$$

மாதிரி 2.

தீர்வு காண்க : $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$.

உதவிச் சமன்பாடு யாதெனில்

$$(m^2 + 2m + 1) = 0$$
$$(m + 1)^2 = 0$$
$$m = -1, -1.$$
$$\therefore \quad y = e^{-x} (\mathrm{A}x + \mathrm{B}).$$

மாதிரி 3.

தீர்வு காண்க : $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$.

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2 + 16 = 0$

$$m^2 = -16$$
$$m = \pm 4i.$$
$$\therefore \quad y = \mathrm{A} \cos 4x + \mathrm{B} \sin 4x.$$

பயிற்சி 52

தீர்வு காண்க:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$ 2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$ 4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$

செயலிகள் (operators):

$\frac{dy}{dx} = \mathrm{D}y$ என்று குறிப்போம். $\mathrm{D}y$ என்பதன் விளக்கம், D என்னும் வகைக் கெழுச் செயலி, y எனும் சார்பின்மேல் இயங்குகிறது. அவ்வாறே $\mathrm{D}^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$ எனவும், $\mathrm{D}^ry = \frac{d^ry}{dx^r}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

6·8. சிறப்புத்தீர்வு காணும் முறை (Method for finding Particular Integral),

$f(\mathrm{D})\,y = \mathrm{X}$ ஆகவிருக்கையில், $\mathrm{X} = e^{ax}$, $\sin ax$, $\cos ax$, x^m ஆக இருக்கலாம்.

(1) $f(\mathrm{D})\,y = e^{ax}$ என்பதின் முழுத்தீர்வு காணல். $f(\mathrm{D})\,y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை முற்கூறிய முறையில் காணலாம். அது $f(\mathrm{D})\,y = e^{ax}$ ன் துணைத்தீர்வாகும் (complementary function). இப்பொழுது $f(\mathrm{D})\,y = e^{ax}$ ன் சிறப்புத்தீர்வு காணல் வேண்டும்.

முழுத்தீர்வு = துணைத்தீர்வு + சிறப்புத்தீர்வு

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.} \text{ ஆகும்.}$$

$$\mathrm{D}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\mathrm{D}^2e^{ax} = a^2e^{ax}$$

....

$$\mathrm{D}^ne^{ax} = a^n e^{ax}.$$

எனவே $f(D)\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}$.

$$\therefore \quad e^{ax} = \frac{1}{f(D)} f(a)\, e^{ax}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(D)}\, e^{ax} = \frac{1}{f(a)} \cdot e^{ax}.$$

ஆகவே $f(D)\, y = e^{ax}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

$$y = \frac{1}{f(D)}\, e^{ax}.$$

$$= \frac{1}{f(a)}\, e^{ax}$$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

இதுவே சிறப்புத் தீர்வாகும். (1)

$$\therefore \quad \text{முழுத்தீர்வு} = \text{துணைத்தீர்வு} + \frac{1}{f(a)}\, e^{ax}.$$

கவனிப்புகள் (1). இங்கு $f(a) = 0$ ஆனல் முறை தவறுதல் ஆகும். இது $f(m) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், ஒரு தீர்வு a ஆக இருந்தால் இது நேரும்.

$$f(D) = (D - a)(D - m_2) \ldots\ldots (D - m_n)$$

$$y = \frac{1}{f(D)} \cdot e^{ax}.$$

$$= \frac{1}{(D - a) \cdot f_1(D)}\, e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D - x)\, f_1(a)}\, e^{ax}.$$

$$\therefore \quad (D - a)\, y = \frac{1}{f_1(a)}\, e^{ax}.$$

$$\frac{dy}{dx} - ay = \frac{1}{f_1(a)}\, e^{ax}.$$

தீர்வுகண்டால், $y = \dfrac{x\, e^{ax}}{f_1(a)}$ ஆகும். …… (2)

(2) $f(D) = (D - a)^2 (D - m_3) \ldots\ldots (D - m_n)$ என்று இருக்குமாஞல்,

$$y = \frac{1}{(D-a)^2 (D-m_3) \ldots\ldots (D-m_n)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^2 \cdot f_2(D)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^2 \cdot f_2(a)} e^{ax}$$

$$(D-a)^2 \; y = \frac{1}{f_2(a)} e^{ax}$$

$$(D-a)(D-a) \cdot y = \frac{1}{f_2(a)} e^{ax}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^{ax}}{f_2(a)} \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க : $(D^2+4D+8)\, y = (1+e^x)^2$

உதவிச் சமன்பாடு $m^2+4m+8=0$ ஆகிறது.

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 4i}{2}$$

$$= -2 \pm 2i$$

துணைத் தீர்வு $= e^{-2x}\,[A \cos 2x + B \sin 2x]$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{1}{D^2+4D+8}(1+e^{2x}+2e^x)$

சிறப்புத் தீர்வு$_1$ $= \dfrac{1}{D^2+4D+8} \cdot 1 \quad (\because \; e^{0x}=1)$

$$= \frac{1}{8}$$

சிறப்புத் தீர்வு$_2$ $= \dfrac{1}{D^2+4D+8} \cdot e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{20}$

சிறப்புத் தீர்வு$_3$ $= \dfrac{1}{D^2+4D+8} \cdot 2e^x$

$$= \frac{2}{13} e^x.$$

முழுத் தீர்வு $y = C . F+P . D_1+PD_2+PD_3$

$$y = e^{-2x}(A \cos 2x+B \sin 2x) + \frac{1}{8}+\frac{e^{2x}}{20}+\frac{2e^{x}}{13}$$

மாதிரி 2.

தீர்வு காண்க : $(D^2+3D+2)\,y=e^{-x}$

உதவிச் சமன்பாடு $m^2+3m+2=0$

$$(m+2)(m+1) = 0$$

$$m= -2, -1.$$

துணைத் தீர்வு $= Ae^{-2x}+Be^{-x}.$

சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{1}{D^2+3D+2}\,e^{-x}$

$$= \frac{1}{(D+2)(D+1)}\,e^{-x}$$

$$= \frac{xe^{-x}}{(-1+2)}$$

$$= xe^{-x}$$

முழுத் தீர்வு $y = Ae^{-2x}+Be^{-x}+xe^{-x}$

மாதிரி 3.

தீர்வு காண்க : $(D^2+6D+9)\,y=2e^{-3x}$

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2+6m+9=0$

$$(m+3)^2=0$$

$$m= -3, -3$$

துணைத் தீர்வு $= e^{-3x}(Ax+B)$

சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{1}{D^2+6D+9} . 2e^{-3x}$

$$= \frac{1}{(D+3)^2}\,2e^{-3x}$$

$$= \frac{x^2}{2} . 2e^{-3x}$$

$$= x^2e^{-3x}$$

முழுத் தீர்வு $= e^{-3x}(Ax+B) + x^2e^{-3x}$.

பயிற்சி 53

தீர்வு காண்க.

1. $(D^2 - 5D+6)\, y = e^{4x}$.

2. $(D^2+4D+6)\, y = 5e^{-2x}$.

3. $(D^2 - 13D+12)\, y = e^{-2x}+5e^{x}$

4. $(D^2 - 6D+9)\, y = 2e^{-x}+e^{3x}$.

5. $(D^2+3D+2)\, y = e^{4x}$, $x=0$, $x=1$ ஆகையால், $y=0$.

6. $(D^2 - 2D+1)\, y = e^{x}+e^{2x}$.

7. $(D^2 - 3D+2)\, y = 2e^{3x}$, $x=0$, $\frac{1}{2}\log 2$ ஆகையால் $y=0$ எனக்கொள்க.

8. $(D^2 - a^2)\, y = e^{nx}+e^{ax}$.

9. $(D^2 - 6D+8)\, y = \cosh 2x$.

10. $(D^2+5D+7)\, y = e^{-x^{1/2}} + 5$.

6·9. *சிறப்புத் தீர்வு (தொடர்ச்சி)*: வலப்பக்கம் X, $\sin ax$ அல்லது $\cos ax$ ஆகவிருந்தால் சிறப்புத் தீர்வுகாணும் முறை.

$$f(D)\, y = \cos ax \text{ அல்லது } \sin ax$$

$$D \cos ax = -a \sin ax$$

$$D^2 \cos ax = -a^2 \cos ax$$

$$D^3 \cos ax = a^3 \sin ax$$

$$D^4 \cos ax = a^4 \cos ax = (-a^2)^2 \cos ax$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

இவ்வாறு கணக்கிடுகையில்

$$D^{2n} \cos ax = (-a^2)^n \cos ax \text{ ஆகிறது.}$$

$$\therefore \quad f(D^2)\cos ax = f(-a^2)\cos ax.$$

$$\cos ax = \frac{1}{f(D^2)} \cdot f(-a^2)\cos ax$$

$$\frac{1}{f(D)^2}\cos ax = \frac{1}{f(-a^2)}\cos ax.$$

D^2 இருக்கும் இடத்து $(-a^2)$ போடவும்.

அவ்வாறே $\frac{1}{f(D^2)}\sin ax = \frac{1}{f(-a^2)}\sin ax.$

கவனிப்பு : (1) $f(-a^2)=0$ ஆனல் இந்த முறை தவறி விடுகிறது. அதாவது (D^2+a^2), $f(D^2)$ ன் ஒரு சினை ஆகும். அப்பொழுது $\cos ax =$ மெ. ப. e^{iax} என்றும்

$\sin ax =$ க. ப. e^{iax} என்றும்

எழுதி, முன் கூறியவண்ணம் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்போம்.

மாதிரி 1.

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \text{மெ. ப. } \frac{1}{D^2+a^2} \cdot e^{iax}$$

$$= \text{மெ. ப. } \frac{1}{(D+ia)(D-ia)} e^{iax}$$

$$= \text{மெ. ப. } \frac{1}{2ia} \cdot xe^{iax}$$

$$= \text{மெ. ப. } -\frac{xi}{2a}[\cos ax + i \sin ax]$$

$$= \frac{x \sin ax}{2a}$$

அவ்வாறே, $\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax = -\frac{x\cos ax}{2a}$ என நிறுவலாம்.

மாதிரி 2.

தீர்வு காண்க. $(D^2-3D+2)y = \sin 3x$

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2-3m+2=0$

$$(m-2)(m-1)=0$$

$$m=2,\ 1.$$

துணைத் தீர்வு $Ae^{2x}+Be^{x}$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{1}{D^2-3D+2} \cdot \sin 3x$

$$= \frac{1}{-9-3D+2} \cdot \sin 3x$$

$$= \frac{1}{-(3D+7)} \sin 3x$$

$$= \frac{3D-7}{-(3D+7)(3D-7)} \sin 3x$$

$$= \frac{(3D-7)\sin 3x}{-(9D^2-49)}$$

$$= \frac{9\cos 3x - 7\sin 3x}{130}$$

முழுத் தீர்வு $y = Ae^{2x}+Be^{x}+\dfrac{9\cos 3x-7\sin 3x}{130}$.

மாதிரி 3.

தீர்வு காண்க. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x = a\sin 2t$

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2+4=0$

$$m = \pm 2i$$

துணைத் தீர்வு $A\cos 2t + B\sin 2t$.

சிறப்புத் தீர்வு: $\dfrac{1}{D^2+4}\, a\sin 2t$

$$= \text{க. ப. } \frac{1}{D^2+4}\, a \cdot e^{i \cdot 2t}$$

$$= \text{க. ப. } \frac{1}{(D+2i)(D-2i)} \cdot a\, e^{i\,2t}$$

$$= \text{க. ப. } \frac{at \cdot e^{2i\,t}}{4i}$$

$$= \text{க. ப. } \frac{at(\cos 2t + i\sin 2t)}{4i}$$

$$= \text{க. ப.} \frac{-at \,.\, i\,(\cos 2t + i \sin 2t)}{4}$$

$$= -\frac{at}{4} \cos 2t.$$

முழுத் தீர்வு $y = A \cos 2t + B \sin 2t - \frac{at}{4} \cos 2t.$

பயிற்சி 54

தீர்வு காண்க.

1. $(D^2 + 2D + 1)\, y = 2e^{-x} + \sin 2x$

2. $(D^2 + 5D + 6)\, y = \sin 4x + e^{-2x}$

3. $(2D^2 + D)\, y = e^{2x} + \sin x$

4. $(D^2 - 8D + 9)\, y = \cos 5x$

5. $(D^2 + 9)\, y = \cos 3x$

6. $(D^2 + 16)\, x = \sin 4t,\ t = 0$ ஆனல் $x = 0 = \frac{dx}{dt}$

7. $(D^2 + 5D - 6)\, y = \sin 4x \sin x$

8. $(D^2 - 3D + 2)\, y = \cos 3x \cos 2x$

9. $(D^2 - 2D + 1)\, y = e^{2x} - \cos 3x$

10. $(D^2 + 1)\, y = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$

11. $(D^2 - 4)\, y = \sin^3 x - \cos^2 x$

12. $(D^2 + 3D + 2)\, y = e^{-x} + \cos x.$

சிறப்புத் தீர்வு (தொடர்ச்சி): $f(D) = X$ ல் $X = x^m$ ஆனல் தீர்வு காணும் முறை.

$$f(D)\,y = x^m$$

$$y = \frac{1}{f(D)}$$

மாதிரி 1.

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + 4D + 5)\,y = 3x^2 - 2.$$

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2 + 4m + 5 = 0.$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$= -2 \pm i.$$

துணைத் தீர்வு e^{-2x} (A cos x + B sin x).

சிறப்புத் தீர்வு : $\dfrac{1}{D^2 + 4D + 5} \cdot 3x^2 - 2$

$$= \frac{1}{5 + 4D + D^2}\,(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5\left(1 + \frac{4D + D^2}{5}\right)}\,(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4D + D^2}{5}\right)^{-1}(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4D + D^2}{5} + \overline{\frac{4D + D^2}{5}}^{\,2}\right)(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4D}{5} - \frac{D^2}{5} + \frac{16D^2}{25} + \frac{8D^3}{5}\right)(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4D}{5} + \frac{11D^2}{25} + \frac{8D^3}{5}\right)(3x^2 - 2)$$

$$= \frac{1}{5}\left[3x^2 - 2 - \frac{4}{5}(6x) + \frac{11}{25}(6)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[3x^2 - 2 - \frac{24x}{5} + \frac{66}{25}\right]$$

$$= \frac{1}{125}\,[\,75x^2 - 50 - 120x + 66\,]$$

$$= \frac{1}{125}\,[\,75x^2 - 120x + 16\,].$$

முழுத்தீர்வு = துணைத்தீர்வு + சிறப்புத்தீர்வு.

பயிற்சி 55

தீர்வு காண்க.

1. $(D^2 - 5D + 6)\,y = x^2 - x + 2$
2. $(D - 1)^2\,y = x$
3. $(D^2 + 3D + 2)\,y = \sin x + x^2$
4. $(D^2 + 3D + 2)\,y = e^{-x} + x^2 + \cos x$
5. $(D^2 + 3D - 4)\,y = x^2 - 2x$
6. $(D^2 + 2D + 4)\,y = e^{-2x} + x^2$
7. $(D^2 + D + 1)\,y = x$
8. $(D^2 - 2D + 3)\,y = x^2$
9. $(D^2 + 4D + 5)\,y = e^{x} + x^3 + \cos 2x$
10. $(D^2 + D + 1)\,y = x^2$.

7. தணித்த வலைவுகளிலும் (Damped Oscillations) தணித்ததிர்விலும் (Forced Vibrations) வகைக் கெழுச் சமன்பாடு களின் உபயோகங்கள்

தணித்த வலைவுகள் : ஓர் நேர்கோட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை நோக்கி ஒரு பொருள் உந்தப்படட்டும். உந்து விசை (force) அப்பொருள் குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து இருக்கும் தூரத்திற்குத் தகவு பெற்றதாகவும், திசை வேகத் திற்குத் தகவு பெற்ற எதிர்ப்பு (resistance to the motion) அதைப் பாதிப்பதாகவும் இருக்கட்டும்.

$$O \longleftarrow \cdots\cdots x \cdots\cdots \longrightarrow P$$

P, ஏதாமொரு நேரம் 't', பொருளின் இருப்பிடமாக அமையட்டும். OP = x. O நேர் கோட்டில் நிலைப் புள்ளி யாக விருக்கட்டும். x தூரத்திலுள்ள ஓர் அலகுப் பொருண்மை யுள்ள பொருளின் மேல் உந்து விசை n^2x ஆக விருக்கட்டும். எதிர்ப்பு $2K \cdot \frac{dx}{dt}$ ஆகவிருக்கட்டும்.

∴ பொருளின் நகர்வை விவரிக்கும் சமன்பாடு என்ன வென்றால்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x - 2K \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + 2K\frac{dx}{dt} = 0$$

(அ. து.) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2K \cdot \frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$

இப்பொருளின் நகர்வை 'தணித்தவலைவு' (damped oscillation) எனச் சொல்கிறோம்.

தணித்ததிர்வுகள் (Forced vibrations).

ஒரு நேர் கோட்டில் ஒரு நிலையான புள்ளி O வை நோக்கி, n^2x உந்து விசைக்குட்பட்டு, எதிர்ப்பு $2K \frac{dx}{dt}$ அளவிலும், ஆவர்த்தன விசை $L \cos pt$ க்கும் உட்பட்டு நகருகிறது. இந்த நகர்வுக்குரிய சமன்பாட்டைக் கணிப்போம்.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - n^2x - 2K \cdot \frac{dx}{dt} + L \cos pt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2K \cdot \frac{dx}{dt} + n^2x = L \cos pt.$$

(i) $K < n$ ஆகவிருந்தால், துணைத்தீர்வு என்னவென்றால்

$$(A \cos \sqrt{n^2 - K^2}\, t + B \sin \sqrt{n^2 - K^2}\, t).$$

துணைச் சமன்பாடு என்னவெனில்

$$m^2 + 2Km + n^2 = 0$$

$$m = - K \pm \sqrt{K^2 - n^2}$$

(i) $K > n$ ஆனால், m இரண்டு மெய்யான வெவ்வேறு மதிப்புகள் பெறும்.

$$x = Ae^{(-K + \sqrt{K^2 - n^2})t} + Be^{(-K - \sqrt{K^2 - n^2})t} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

(ii) $K = n$ ஆனால், m இரண்டு சமமான மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. $m = -K, -K$.

$$x = e^{-Kt}(A + Bt) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

(iii) $K < n$ ஆகவிருந்தால், m கற்பனை மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$$m = -K \pm i\sqrt{n^2 - K^2}$$

$$x = e^{-Kt}\,[A\cos\sqrt{n^2-K^2}\,t + B\sin\sqrt{n^2-K^2}\,t \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(3) வது சமன்பாடு, பொருள் ஊசலாடுகிறது என்பதை வலியுறுத்துகிறது. e^{-Kt} என்பது பெருக்குவதால், ஊசலாடும் வீச்சுக் குறைகிறது. K ன் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக, வீச்சுக் குறைவின் வேகம் அதிகரிக்கிறது.

சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{(D^2+2KD+n^2)} \cdot L\cos pt$$

$$= \text{மெ. ப. } \frac{L \cdot e^{ipt}}{(D^2+2KD+n^2)}$$

$$= L \cdot \frac{(n^2-p^2)\cos pt + 2Kp\sin pt}{(n^2-p^2)^2+4R^2p^2}$$

$$= \frac{L\cos(pt-\alpha)}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4K^2p^2}}, \quad \left[\tan\alpha = \frac{2Kp}{n^2-p^2}\right]$$

$$\therefore \quad x = e^{-kt}\,[A\cos\sqrt{n^2-K^2}\,t + B\sin\sqrt{n^2-K^2}\,t] + \frac{L\cos(pt-\alpha)}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4K^2p^2}}.$$

8. ஃபூரியர் தொடரில் தொகைநுண் கணிதத்தின் ஈடுபாடு

(Application of Integration to Fourier Series)

$(0, 2\pi)$ என்ற தொகை நுண் கணித எல்லைகளுக்குள் $f(x)$ என்ற சார்பை

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

என்றெழுதமுடியும். $f(x)$ ன் விரிப்பை, $f(x)$ ன் ஃபூரியர் தொடர் என்கிறோம். இங்கு a_n, b_n இவைகளை $f(x)$ ன் ஃபூரியர் கெழுக்கள் எனச் சொல்கிறோம். அவையாவன

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

ஆகவே சில கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

குறிப்பு: தொகை நுண் கணித எல்லைகள் $-\pi, \pi$ ஆக இருந்தாலும் இத் தேற்றம் இந்த உருவத்தைப் பெறும்.

மாதிரி 1.

(0, 2π) என்ற வீச்சில் (range)

$$x = \pi - 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\ldots\right]$$

இதிலிருந்து $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ எனக் காண்.

ஃபூரியர் தொடர் என்னவென்றால்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

இங்கு $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

இங்கு $f(x) = x$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\, dx$$

$$= \left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi$$

$$\therefore \quad x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\sin nx\right)$$

$$= \pi - 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\ldots\right]$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ஈடாக்கினுல்

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \ldots\ldots\right]$$

$$2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\ldots\ldots\right) = \frac{\pi}{4}$$

பயிற்சி 56

$(-\pi, \pi)$ என்ற வீச்சில்,

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\cos nx}{n^2}$ எனக் காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 30

1. $a\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+K$ 2. $\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C$

3. $\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{3}{4}x^{4/3}+x+C$ 4. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+C$

5. $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{10}{3}.x^{3/2}+4\sqrt{x}$ 6. $3\sin^{-1}x+5\tan^{-1}x+C$

7. $-\cot x-x+C$ 8. $10\sin x-5\sec x+C$

9. $x-\cos x+C$ 10. $x-\sin x+C$

11. $\tan x-\sec x+C$ 12. $\frac{x+\sin x}{2}+C$

13. $\frac{x-\sin x}{2}+C$ 14. $\frac{(2+x)^4}{4}+C$

15. $\frac{(1-x)^5}{5}-\frac{(1-x)^4}{4}+C.$

பயிற்சி 31

1. $\frac{(2x+3)^6}{12}$ 2. $\frac{(3-2x)^{11}}{-22}$

3. $\dfrac{1}{(a-bx)^{n-1} \cdot (-b)\,(1-n)}$ 4. $-\dfrac{1}{5}\log(3-5x)$

5. $\dfrac{e^{2-3x}}{-3}$ 6. $2\sqrt{e^x}$

7. $-\dfrac{2\sqrt{a-bx}}{b}$ 8. $\dfrac{(b+ax)^{-p/q+1}}{(1-p/q)\,a}$

9. $-\dfrac{1}{n}\cos nx$ 10. $-\dfrac{1}{2}\tan(1-2x)$

11. $-\dfrac{1}{3}\cot 3x$ 12. $-\dfrac{1}{2}\operatorname{cosec} 2x$

13. $\dfrac{1}{3}\sec 3x$ 14. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 6x}{12}+C$

15. $\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{\cos 4x}{4}-\dfrac{\cos 2x}{2}\right]$

16. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin 8x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{2}\right]$

17. $\dfrac{1}{2}\left[\sin x-\dfrac{\sin 3x}{3}\right]$

18. $\dfrac{1}{4}\left[x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 4x}{4}+\dfrac{\sin 6x}{6}\right]$

19. $\left[\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin 3x}{3}\right)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin 5x}{5}+\sin x\right)\right]$

20. $-\dfrac{3}{4}\cos x+\dfrac{\cos 3x}{12}+C$

21. $\dfrac{1}{36}\cdot\sin 9x+\dfrac{1}{4}\sin 3x$;

22. $\dfrac{1}{12a}\cos 3ax-\dfrac{3}{4a}\cos ax$

23. $\frac{1}{192}\cos 6x - \frac{3}{64}\cos 2x$

24. $2(a-b)\,.\tan\frac{x}{2}$ 25. $\frac{a^{mx}}{m\log a}$.

பயிற்சி 32

1. $\tan(\log x) + C$ 2. $\frac{(e^x+1)^5}{5} + C$

3. $\frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + C$ 4. $\log(\tan^{-1} x) + C$

5. $e^{\sin^{-1} x}$ 6. $\frac{1}{11n}\cdot(a^2+x^n)^{11} + C$

7. $-\frac{1}{n}\cos(x^n) + C$ 8. $-2\cos\sqrt{x}$

9. $2\,.\,\frac{(1+\sqrt{x})^{n+1}}{n+1}$ 10. $-\cos(\tan^{-1} x) + C$

11. $-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} + C$

12. $e^{x+1/x} + C$ 13. $\log(1+e^x)+C$

14. $\frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x$

15. $(\log\sin x)^{3/2}$ 16. $\frac{2}{3}\tan^{3/2} x$

17. $-\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$

18. $\frac{\sec^6 x}{6}$ 19. $\frac{-1}{1+e^x}$

20. $(\log\sec x)^{3/2}$.

பயிற்சி 33

1. $\log \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + C$

2. $\log (e^x+1)+C$

3. $\log (e^x+e^{-x})+C$

4. $\log (5 \sin x+3 \cos x)$

5. $\log \log \sin x$

6. $\frac{1}{nb} \log (a+bx^n)$

7. $-\frac{1}{\sec x+\tan x}$

8. $\log (x+\sin x)$

9. $\frac{1}{b} \cdot \log (a+b \tan x)$

10. $\frac{1}{2a} \log (ax^2 + b) + C.$

பயிற்சி 34

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

2. $-\frac{1}{x-6}$

3. $\frac{1}{12} \log \frac{x-7}{x+5} + C$

4. $\frac{1}{3} \log \frac{x+1}{x+4}$

5. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{\sqrt{5}-1+2x}{\sqrt{5}+1-2x}$

6. $\frac{1}{3} \tan^{-1} (x^3+1)$

7. $\frac{1}{2\sqrt{19}} \cdot \log \frac{3x-2-\sqrt{19}}{3x-2+\sqrt{19}}$

8. $\frac{1}{3} \log \frac{4x + 2}{4 - 4x}$

9. $\frac{1}{2} \log (x^2+4x+5) - \tan^{-1} (x+2)+C$

10. $-\frac{1}{6} \log (1-6x-9x^2) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+3x+1}{\sqrt{2}-3x-1} + C$

11. $\frac{5}{2}\log(x^2-2x-35)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-7}{x+5}\right)$

12. $-\frac{1}{6}\log\frac{(3+2x-3x^2)}{}+\frac{8}{3\sqrt{10}}\log\frac{\sqrt{10}+3x-1}{\sqrt{10}-3x+1}$

13. $2\log(x^2+2x+2)+\tan^{-1}(x+1)$

14. $x+\log(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

15. $(x-2)\tan^{-1}(x+1)$

16. $-\frac{3}{4}\log(2x^2-6x+5)-\frac{7}{2}\tan^{-1}(2x-3)$

17. $\frac{1}{8\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+x^4-1}{\sqrt{5}-x^4+1}$

18. $-x+\log\frac{1-x-x^2}{}+\frac{3}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+2x+1}{\sqrt{5}-2x-1}$

19. $-\frac{1}{8}\log(4x^2-4x+3)+\frac{\sqrt{2}}{8}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

பயிற்சி 35

1. $-2\log(x-1)+3\log(x-4)+C$

2. $\frac{11}{32}\log(x-6)-\frac{11}{32}\log(x+2)-\frac{1}{4(x+2)}$

3. $\log\frac{x}{(x+1)^{1/3}(1-2x)^{2/3}}$ 4. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

5. $x+\log\frac{(x-2)^4}{x-1}$ 6. $3\log(x+2)+\frac{5}{x+2}$

7. $\frac{2}{a}\log\frac{x-1}{x+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$

8. $\frac{1}{8}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}$

9. $\frac{1}{9}\log\frac{x-1}{x+2}-\frac{2}{3(x-1)}$

10. $\frac{1}{3}\log(x-1)+\log(x+1)-\frac{5}{6}\log(2x+1)$

11. $\frac{1}{4}\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\log(1+x)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

12. $\log(x-2)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}(x)$

13. $\frac{1}{3}\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}.\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

14. $\frac{1}{2}\log x^2+x+1-\log x-\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

15. $\log\frac{\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$

16. $\log\frac{\sin x}{1+\sin x}$

17. $\log\frac{\tan x+1}{\tan x+2}$

18. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}$

19. $\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)-\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

20. $\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}.\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}.\frac{x}{a}\right].$

பயிற்சி 35-A

1. $\frac{23}{41}x+\frac{2}{41}(\log 4\sin x+5\cos x)$

2. $\frac{23}{41}x-\frac{2}{41}\log(4\cos x+5\sin x)$

3. $\frac{7x}{10}+\frac{1}{10}\log(3\sin x+\cos x)$

4. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)$

5. $2\theta+\log(2\cos\theta+\sin\theta)$

6. $-\frac{x}{5}+\frac{3}{5}\log(\sin x-2\cos x)$

7. $\frac{4\theta}{5}+\frac{3}{5}\log(2\sin\theta+\cos\theta)$

8. $\frac{2\theta}{13}-\frac{3}{13}\log\ (3\cos\theta+2\sin\theta)$

9. $-\frac{x}{5}+\frac{3}{5}\log(\sin x-2\cos x)$

பயிற்சி 36-A

1. $\frac{1}{5}\log\frac{5+\tan\frac{x}{2}}{5-\tan\frac{x}{2}}+C$

2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right]+C$

3. $\frac{2}{5}\tan^{-1}\left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{5}\right]$

4. $\frac{1}{\sqrt{13}}\log\left[\frac{\sqrt{13}-3+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{13}+3-2\tan\frac{x}{2}}\right]$

5. $\log\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$

6. $\frac{2}{3}\tan^{-}\left[\frac{5\tan\frac{x}{2}-4}{3}\right]$

7. $\frac{1}{5}\log\left[\frac{9+3\tan\frac{x}{2}}{1-3\tan\frac{x}{2}}\right]$

8. $\frac{1}{26}\log\left(\frac{1+5\tan x}{5-\tan x}\right)$

9. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log(\cos x+\sin x)$

10. $\frac{1}{4}x-\frac{3}{4\sqrt{7}}\cdot\log\frac{3\tan\frac{x}{2}+4-\sqrt{7}}{3\tan\frac{x}{2}+4+\sqrt{7}}$

11. $-\frac{x}{3}+\frac{5}{6}\tan^{-1}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)$

12. $\frac{1}{4}x-\frac{5}{10}\tan^{-1}\left[\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right]$

பயிற்சி 36-A

1. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}+C$

2. $\frac{1}{8}\left[\frac{(2x-1)^{7/2}}{7}+\frac{3}{5}(2x-1)^{5/2}+(2x-1)^{3/2}+(2x-1)^{1/2}\right]+C$

3. $\sqrt{x^2-1}+\log(\sqrt{x^2-1}+x)+C$

4. $-\frac{\sqrt{1-2x}}{15}[2+2x+3x^2]$

5. $2\left[\frac{x^{3/2}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\log(\sqrt{x}+1)\right]$

6. $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)$ 7. $\log \frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}$

8. $2\sqrt{x}+2 \tan^{-1}(\sqrt{x})$ 9. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 10. $\frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}}$.

11. $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 12. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

பயிற்சி 37

1. $\cosh^{-1}(2x-3)+C$ 2. $\frac{1}{2}\cosh^{-1}[2(x+1)]$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)$ 4. $2\sinh^{-1}(\sqrt{x})$

5. $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$

6. $\frac{1}{8}\sin^{-1}.(2x-5)+\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-6-x^2}$

7. $\frac{(x+a)\sqrt{x^2+2ax}}{a}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x+a}{a}$

8. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\sinh^{-1}.\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

9. $2\sqrt{x^2+4x+3}-4\cosh^{-1}(x+2)$

11. $\sqrt{x^2+2x+2}+\sinh^{-1}(x+1)$

12. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}.\left[\frac{2+x}{\sqrt{2}(x-1)}\right]$

13. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+x-3}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\cosh^{-1}.\frac{4x+1}{5}$

15. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-a+b}{a+b}\right)$ 17. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)$

18. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}.\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$ 19. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}\sinh^{-1}.\dfrac{3+5x}{\sqrt{2}\,(1-2x)}$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}.\log\left(\dfrac{x}{a+bx+\sqrt{a}.\sqrt{a+2\,bx+cx^2}}\right).$

பயிற்சி 37-A

1. $x\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$
2. $\dfrac{x^2\sin^{-1}x}{2}-\dfrac{\sin^{-1}x}{4}+\dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$
3. $\dfrac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x+C$
4. $x(\log x)^2-2x\log x+2x$
5. $\dfrac{x^4}{4}\log x-\dfrac{x^4}{16}$ 6. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\log x-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$
7. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2\sin 2x}{2}-\dfrac{x\cos 2x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$
9. $x\sec x-\log(\sec x+\tan x)$
10. $x\tan x+\log\cos x$
12. $-\dfrac{1}{x}\log x-\dfrac{1}{x}$ 13. $-\dfrac{\log x}{x+1}+\log\dfrac{x}{x+1}$
14. $x-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x$
15. $x\tan^{-1}x-\log\sqrt{1+x^2}-\left(\dfrac{\tan^{-1}x}{2}\right)^2$

பயிற்சி 38

1. $\dfrac{e^x}{x+2}$ 2. $\sin x.e^x$ 3. $e^x\cot x$

4. $x \tan \frac{x}{2}$ 5. $e^x \tan \frac{x}{2}$

6. $\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$

7. $\frac{e^{3x}}{13}[3 \sin 2x - 2 \cos 2x]$.

பயிற்சி 39

1. $\log \frac{4}{3}$ 2. $\frac{5}{2} \log 2$ 3. $\frac{5}{3} - \log 4$ 4. $\frac{64}{231}$

5. $\frac{8}{105} - \frac{71}{840\sqrt{2}}$ 6. $\frac{2}{15}$ 7. $\frac{15\pi}{96}$ 8. $\frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}}$

9. $\frac{3\pi}{16}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{1}{a^2}$ 12. $\frac{2}{5} \tan^{-1} \frac{1}{5}$

13. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 15. $\frac{2\pi}{3}$.

பயிற்சி 40

1. $\frac{\pi}{4}$ 9. $\frac{\pi}{8} \log 2$ 10. $\frac{\pi}{2}(\pi - 1)$.

பயிற்சி 41

1. (1) $\frac{32}{15}\sqrt{2}$, (2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$, (3) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$, (4) $\frac{8}{3}$.

2. πab 3. 2 4. 2 5. 9 6. $\frac{16}{3}$

7. $ab\left[\cos^{-1} . \frac{c}{a} - \frac{c\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2}\right]$;

$$ab\left[\pi - \cos^{-1}\frac{c}{a} + \frac{c\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2}\right]$$

8. $ab\left[\cos^{-1} \cdot \frac{c}{b} + \frac{c}{b^2} \cdot \sqrt{b^2 - c^2}\right]$

$$ab\left[\pi - \cos^{-1}\frac{c}{b} + \frac{c}{b^2}\sqrt{b^2 - c^2}\right]$$

10. $4ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ 11. $4\pi a^2$.

பயிற்சி 42

1. $\frac{\pi}{3}\pi r^3$; $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 2. $\frac{\pi^2}{2}$

4. (i) $5\pi^2 a^3$, (ii) $\pi(8\log 2 - 3)a^3$

5. $\frac{16\pi a^3}{105}$ 6. 24π

7. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ 8. $\frac{32\pi a^3}{15}$; $2\pi a^3$

பயிற்சி 43

(i) $1 + \frac{a^2}{3}$; (ii) $\frac{8\pi a^2}{2}(2\sqrt{2} - 1)$; (iii) $\frac{\pi c^2}{2}[2+\sinh 2]$

(iv) $\frac{64\pi a^2}{3}$.

பயிற்சி 44

1. $\log(2x+\sqrt{3})$ 2. $\frac{97^{3/2} - 52^{3/2}}{54}$ 3. $4a\sqrt{3}$ 4. $\frac{4}{3}a\sqrt{3}$

5. $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$ 6. $6a$ 7. $\frac{a\pi^2}{2}$.

பயிற்சி 45

1. $\bar{x} = x - \dfrac{y-c}{\sinh \frac{x}{c}}$; $\bar{y} = \dfrac{y}{2} + \dfrac{x}{2 \sinh \frac{x}{c}}$

2. $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2a}{5}$

3. $\dfrac{4a}{3\pi}$ (வட்ட மையத்திலிருந்து)

4. $\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$ 5. $\bar{x} = \dfrac{16}{7}$; $\bar{y} = 0$

6. $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$; $\bar{y} = \dfrac{\pi}{8}$ 7. $\bar{x} = \pi a$; $\bar{y} = \dfrac{5a}{6}$

8. $\bar{x} = \dfrac{(3c-a)(a+2c)^{3/2} + a^{5/2}}{5\{(a+2c)^{3/2} - a^{3/2}\}}$.

பயிற்சி 47

1. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$

2. $x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} + \log[(x + \sqrt{1+x^2}) \times (y + \sqrt{1+y^2})] = C$

3. $\sin^{-1} x = C$ 4. $(y+1)(1+e^{-x}) = A\, e^{y}$

5. $\tan x \tan y = C$ 6. $4e^{y} = 2e^{2x} + x^4 + C$

7. $(1 + bx)(y - b) = cx$

8. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + 2\log(x-1)(y-1) = C$

9. $e^{x} + 1 = a \cos y$; $1 + e^{x} = 2\sqrt{2} \cos y$

10. $\dfrac{a}{2} \log \dfrac{x-y-a}{x-y+a} = y + C$ 11. $\sin(y-x) = c\, e^{x^2/2}$

12. $x+c = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$

13. $(x^2-y^2-1)^5 = c\,.\,(x^2+y^2-3)$

14. $y = Ax\,e^{xy}$ 16. $(g\cos\alpha - kv)\,e^{kv} = g\cos\alpha$.

பயிற்சி 48

1. $y = ce^{x^2/2y^2}$ 2. $\log x = 2\tan^{-1}\frac{y}{x}+C$

3. $xy\,(y-x) = C$ 4. $x^2+y^2 = 2y$

5. $e^{y/x} = cxy$ 6. $\log\frac{y+x}{c} = -\frac{2xy}{(x+y)^2}$

7. $y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2$

8. $y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2$

9. $6x^2 - 2y^2 - xy = cx$

10. $\frac{x}{y}+\log\frac{y^3}{x^2} = C$ 11. $\sin\frac{y}{x} = cx$

12. $\log x - \cos\frac{x}{y} = C$ 13. $xy\cos\frac{y}{x} = C$

14. $y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2$ 15. $\log r = 2\theta + C$.

பயிற்சி 49

1. $4x^2-24xy+20y^2+16x = K$

2. $(y+3x-3)\,(y+2x-1) = C$

3. $(y-x)^3 = c\,(x+y-2)$

4. $x+5y+2 = c\,(x-y+2)^4$

5. $(y-x+1)^2\,(y+x-1)^5 = C$

6. $\log(x+2y+2) = \dfrac{x}{2\,(x+2y+2)} + C$

7. $y^2-(2y)\,(x+3)-2\,(x+3)^2 = C$

8. $(3y-2x-1)^2\,(2y+x-2) = C$

9. $\log(4x-8y+5)-(4x-8y) = C.$

பயிற்சி 50

1. $4y = \cos x\,(2x+\sin x)+C$

2. $y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1}x + C$

3. $y\,e^{tan^{-1}x} = \left(\dfrac{e^{tan^{-1}x}}{2}\right)^2 + C$

4. $y\,(1+x^3) = x + \dfrac{x^3}{3} + C$

5. $y\cos x = e^x + C$

6. $y\,(x^2+1) = 4\,\dfrac{x^3}{3} + C$

7. $y\,\dfrac{(x-1)}{x^2} = x^2 - x + C$

8. $y = 2\,(\sin^3 x - 3\sin^2 x + 7\sin x - 7) + c\,e^{-\sin x}$

9. $y\,e^{x^2} = \dfrac{x^2}{2} + C$

10. $y\log x = -\dfrac{\cos 2x}{2} + C$

11. $\dfrac{y}{(x+1)^n} = e^x + C$

12. $(y-1)\, e^{\sin x} = -\cot x - x + C$

13. $x e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + C$

14. $x \sec y = \tan y + C$

15. $y \log x = (\log x)^2 + C.$

பயிற்சி 51

1. $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2x^2} + C$ 2. $x + x^2 + \frac{1}{y} = C$

3. $\frac{1}{x^4 y^4} + 4x = C$

4. $\frac{1}{y} \cdot e^{-x^2/2} + \int e^{-x^2/2} \cdot \sin x \, dx = C$

5. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{c}{\sqrt{x}}$

6. $\frac{1}{y^{n-1}} = 2\left(\sin x + \frac{1}{n-1}\right) + c\, e^{+(n-1)\sin x}$

7. $\frac{1}{x^2 y^2} + 2x = C$

8. $y(\log x + 1) + cxy = 1$

9. $\sin y = (1 + x)(e^x + c)$

10. $\tan y = \frac{1}{2}(x^3 - 1) + ce^{-x^2}$

11. $\frac{x^3}{y^3} = 3 \sin x + C$

12. $\sqrt{y} = -\frac{(1-x^2)}{3} + c\,(1-x^2)^{3/4}$

13. $y^n = x - \frac{a}{n} + ce^{-nx/a}$

14. $y = 3 - 2 \sin x + ce^{-\sin x}$

15. $y^3 \cos^3 x = - \frac{\cos^6 x}{2} + C$

பயிற்சி 52

1. $y = Ae^{2x} + Be^{x}$ 2. $y = e^{2x} (Ax + B)$

3. $y = e^{-2x} (A \cos \sqrt{2}\, x + B \sin \sqrt{2}\, x)$

4. $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

5. $y = Ae^{\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)x} + Be^{\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)x}$

பயிற்சி 53

1. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{2} e^{4x}$

2. $y = e^{-x} (A \cos \sqrt{2x + B}) + \frac{5}{2} + e^{-3x}$

3. $y = Ae^{x} + Be^{12x} + \frac{1}{42} e^{-2x} - \frac{5x}{11} e^{x}$

4. $y = e^{3x} (A + Bx) + \frac{e^{-x}}{8} + \frac{x^2 e^{3x}}{2}$

5. $6y = (e^2+e)\, e^{x} - (e^2+e+1)\, e^{2x} + e^{4x}$

6. $y = e^{x} \left(A + Bx + \frac{x^2}{2}\right) + e^{2x}$

7. $y = 2e^{x} - 3e^{2x} + e^{3x}$

8. $y = A\cos(ax + B) + \frac{e^{nx}}{n^2 - a^2} + \frac{x}{2a}e^{ax}$.

9. $y = Ae^{2x} + Be^{4x} + \frac{e^{-2x}}{48} - \frac{xe^{2x}}{4}$

10. $y = e^{-5x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + B\right) + \frac{4}{19}e^{-x/2} + \frac{5}{7}$.

பயிற்சி 54

1. $y = e^{-x}(Ax + B) + x^2e^{-x} - \frac{4\cos 2x + 3\sin 2x}{25}$

2. $y = Ae^{-3x} + Be^{-2x} - \frac{2\cos 4x + \sin 4x}{50} + xe^{-2x}$

3. $y = A + Be^{-x/2} + \frac{e^{2x}}{10} - \frac{\cos x + 2\sin x}{5}$

4. $y = Ae^{(4+\sqrt{7})x} + Be^{(4-\sqrt{7})x} - \frac{2\cos 5x + 5\sin 5x}{232}$

5. $y = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{x}{6}\cdot\sin 3x$

6. $x = \frac{1}{32}\sin 4t - \frac{t}{8}\cos 4t$

7. $y = Ae^{x} + Be^{-6x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x - \cos 3x}{30} + \frac{31\cos 5x - 25\sin 5x}{336}\right]$

8. $y = Ae^{x} + Be^{2x} - \frac{15\sin 5x + 23\cos 5x}{1508} + \frac{\cos x - 3\sin x}{20}$

9. $y = e^{x}(A + Bx) + e^{2x} + \dfrac{3\sin 3x + 4\cos 3x}{50}$

10. $y = A\cos t + B\sin t + 1 - \dfrac{t\sin t}{2}$

11. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \dfrac{\sin 3x}{52} - \dfrac{3\sin x}{20} + \dfrac{\cos 2x}{16} + \dfrac{1}{8}$

பயிற்சி 55

1. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{1}{6}\left[\dfrac{3x^2 + 2x}{3} + \dfrac{20}{9}\right]$

2. $y = e^{x}(Ax + B) + x + 2$

3. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \dfrac{\sin x - 3\cos x}{10} + \dfrac{1}{2}\left[x^2 - 3x + \dfrac{7}{2}\right]$

4. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + xe^{-x} + \dfrac{1}{2}\left[x^2 - 3x + \dfrac{7}{2}\right] + \dfrac{\cos x + 3\sin x}{10}$

5. $y = Ae^{x} + Be^{-4x} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{32}$

6. $y = e^{-x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + \dfrac{1}{4}e^{-3x} + \dfrac{x^2 - x}{4}$

7. $y = e^{-x/2}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + B\right) + x + 3$

8. $y = e^{x}(A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x) + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{8}{27}$

9. $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$

$$+ \frac{1}{10} e^{x} + \frac{1}{5}\left[x^3 - \frac{12x^2}{5} + \frac{66x}{25} - \frac{144}{125}\right]$$

$$+ \frac{\cos 2x + 8 \sin 2x}{65}$$

10. $y = e^{-x/2}\left(A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + x^2 - 2x.$

———

கடந்த தேர்வுகளில் சென்னைப் பல்கலைக் கழக வினாத்தாள்கள்

ஏப்ரல் 1966

காலம் : 3 மணி] தாள் I [மொ. மதிப்பெண் 75

ஆறே வினாக்களுக்கு விடை தருக.

எல்லா வினாக்களும் சமமான மதிப்பெண்களைப் பெறும்.

I. (*a*) காரணிப்படுத்துக :

$$a^3 (b^2 - c^2) + b^3 (c^2 - a^2) + c^3 (a^2 - b^2)$$

(*b*) a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடரிலுள்ள 3 சமமற்ற எண்களாகில், $a,\ b - a,\ c - a$ பெருக்குத் தொடரில் இருந்தால்,

$$a : b : c :: 1 : 3 : 5$$ என நிரூபி.

II. (*a*) 5 இந்துக்கள், 4 கிரிஸ்தவர்கள், 3 முகம்மதியர்கள் கொண்ட சமூகத்திலிருந்து 5 பேர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. எந்த சாதியினரும் மெஜாரிடியில் இல்லாமலும், விடுபடாமலும் இருக்குமாறு குழுவை எத்தனை வகையில் அமைக்கலாம்?

(*b*) '$2l$' நீளமும், மையத்திலிருந்து x தூரத்தில் அதன் அச்சின் மேலுள்ள புள்ளியில் M திருப்பத்-

திறனையும் உடைய காந்தத்தின் ஈர்ப்புக்களம் H

$$\frac{M}{2l}\left\{\frac{1}{(x-l)^2}-\frac{1}{(x+l)^2}\right\}$$ ஆகில்,

x ஐப் பொருத்து l மிகச் சிறியதாக விருக்கும் பொழுது, H தோராயமாக $\frac{2M}{x^3}$ க்குச் சமம் என நிரூபி.

III. (*a*) $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+2^2}{3!}+\frac{1+2+2^2+2^3}{4!}+\ldots\ldots\infty$ ன் மதிப்பு e^2-e என நிரூபி.

(*b*) $x>0$ ஆக விருக்கும் பொழுது

$$\log_e x=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}\ldots\ldots$$

என நிரூபி.

IV. (*a*) மதிப்பைக் காண்.

$$\begin{vmatrix} 21 & 17 & 7 & 10 \\ 24 & 22 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(*b*) ஹார்னர் முறையை உபயோகித்து

$$x^3-2x^2-3x-4=0$$

என்ற சமன்பாட்டில் 3 க்கும் 4 க்கும் இடையேயுள்ள மூலத்தை இரண்டு தசமத்தான சுத்தமாகக் காண்க.

V. (*a*) x ஐப் பொருத்து வகையிடு :

(i) $\log_e\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1-x}\right)$

(*b*) $y=(\sin^{-1}x)^2$ ஆனல்

$(1-x^2)\,y''=xy'+2$ எனக் காண்க.

(c) $y = x^3 + x + 1$; $2y = x^3 + 5x$ என்ற வளைவரைகள் (1, 3) புள்ளியில் தொடுகின்றன என நிரூபி. தொடுபுள்ளியில் பொதுத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

VI. (a) $V = (1 - 2xy + y^2)^{-1/2}$ ஆனால்,

$$x \frac{\partial V}{\partial x} - y \frac{\partial V}{\partial y} = y^2 V^3$$ என நிரூபி.

(b) $q = R\, r^2 \sqrt{h}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து q ஐக் கணித்தால், R மாறிலியாக விருக்கும் பொழுது, r ல் ஏற்படக் கூடிய சிறு சதப் பிழை h ல் ஏற்படக்கூடிய சிறு சதப் பிழையைப் போல் நான்கு மடங்கென நிரூபி.

VII. (a) x ஐப் பொருத்து தொகையிடுக :

(i) $\dfrac{x^2 + 1}{4x^2 + 12x + 7}$ (ii) $\sin 6x \sin 2x$

(iii) $x \tan^{-1} x$.

VIII. (a) $a^4 y^2 = (a^2 - x^2)^3$ என்ற வளைவரை, x அச்சைச் சுற்றுகையில் ஏற்படும் திடப் பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

(b) 'a' ஆரமுள்ள, சீரான அரைவட்டத் தகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

IX. கீழ்வரும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(i) $x^2 y \dfrac{dy}{dx} = (x + 1) \operatorname{cosec} y$

(ii) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{x^2 + 1} y = \dfrac{y^2}{x^2 + 1}$

(iii) $(x^2 - y^2)\, dx + 3xy\, dy = 0$

X. தீர்க்கவும் :

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4 \dfrac{dy}{dx} + 5y = x + 2$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

செப்டம்பர் '66

I. (a) x, y மெய்யாக விருக்கும் பொழுது
$4x^2 + 9y^2 - 4ax - 18y + 108 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் xக்கு வரையறை மதிப்புகளைக் காண்க.

(b) a, b, c கூட்டுத் தொடரிலும், b, c, d பெருக்குத் தொடரிலும், c, d, e இசைத் தொடரிலும் இருந்தால், a, c, e பெருக்குத் தொடரில் அமையும் என நிரூபி.

II. (a) அடிப்படை விதிகளை உபயோகித்து
$_nP_r = r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + {}_{n-1}P_r$ என நிரூபி.

(b) $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_n x^n$, ஆகில்

$$\frac{C_1}{C_0} + 2 \cdot \frac{C_2}{C_1} + 3 \cdot \frac{C_3}{C_2} + \ldots\ldots + n \cdot \frac{C_n}{C_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$$ என நிரூபி.

III. (a) $\log_e (1 + 3x + 2x^2) = 3x - \frac{5}{2} x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots$

என நிரூபி. மேலும் x^r ன் கெழுவைக் காண்.

(b) ஒரு சோதனை எவ்வளவு தடவை தோற்கிறதோ இரு மடங்கு தடவைகள் வெல்கிறது. 6 சோதனைகளில் குறைந்தபட்சம் 4 வெற்றிகள் கிட்டுவதானல் நிகழ்வுத் தகவு என்ன ?

IV. (a) நிரூபிக்க :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

(b) $x^3 - 5x - 11 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின், மூலத்தின் தோராயமான மதிப்பு 3 ஆனால், நியூட்டன் முறையை உபயோகித்து இரண்டு தசம சுத்தமாக மூலத்தைக் காண்க. இந்த முறையின் தத்துவத்தை விளக்குக.

V. (a) x ஐப் பொருத்து வகையிடுக :

(i) $a \tan^2 (bx + c) + \sec^3 8x$

(ii) $\dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(b) $y = x^2 \cos x$ ஆனால்,
$x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6) y = 0$ என நிரூபி.

(c) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ என்ற வளைவரை (1, 1) என்ற புள்ளியில் மீப்பெறு மதிப்பையும், (– 1, – 1) என்ற புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பையும் பெறும் என நிரூபி.

VI. (a) $u = \sin^{-1} \dfrac{x}{y} + \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ ஆனால்

$x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிரூபி.

(b) $y^2 = 4ax$ என்ற வளைவரைக்கு, ஆதியில் (0, 0 வில்) கோட்ட ஆரையைக் காண்.

VII. x ஐப் பொருத்து தொகையிடுக :

(i) $\dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

(ii) $x^2 \sin x$

(iii) $\dfrac{(1 + \log x)^n}{x}$.

VIII. (a) $ay^2 = x^3 + ax^2$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் பரப்பு $\dfrac{8a^2}{15}$ என நிரூபி.

(*b*) $y^2 = x^3$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தை ஆதியிலிருந்து (1, 1) புள்ளிக்குக் கணக்கிடுக.

IX. கீழ்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(i) $x^2\, dy + (y^2 - xy)\, dx = 0$

(ii) $xe^y\, dy + \dfrac{x^2+1}{y}\, dx = 0$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2}\, y = \dfrac{1}{2x^2\sqrt{1+x^2}}$

X. (*a*) சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும் :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{3x} + \cos 5x$$

(*b*) μ வும், n-உம் மிகையாக விருக்கையில், μ சிறியதாகவும் இருக்கும் பொழுது,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + n^2x = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும். அம்சது தணித்த அலையின் சமன்பாடு எனக் காண்க.

ஏப்ரல் 1967

I. (*a*) a, b, c கூட்டுத் தொடரிலும் ; p, q, r இசைத் தொடரிலும் ; ap, bq, cr பெருக்குத் தொடரிலும் இருந்தால்

$$\frac{p}{r} + \frac{r}{p} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$ என நிருபி.

(*b*) கீழ்க்கண்ட தொடரில் எண்ணிலிக்குக் கூட்டுத் தொகை காண் :

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3\,.\,5}{4\,.\,8} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12} + \ldots\ldots$$

II. (*a*) அடிப்படை விதிகளை உபயோகித்து nC_r ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(b) ஒரு கூட்டத்தில் ஒவ்வொரு அங்கத்தினரும் மற்றொரு அங்கத்தினரும் கை குலுக்கிஞர்கள். 66 கை குலுக்கல்கள் நிகழ்ந்தன. எவ்வளவு அங்கத்தினர்கள் அக் கூட்டத்தில் இருந்தனர்?

III. (a) மதிப்பிடு :

$$\begin{vmatrix} -2a & (a+b) & (a+c) \\ (b+a) & -2b & (b+c) \\ (c+a) & (c+b) & -2c \end{vmatrix}$$

(b) $10x^2-xy-3y^2+\lambda x+7y-2$ என்ற கோவையை இரண்டு விகிதமுறு முதற்படிச் சினைகளாகப் பிரித்தால் λ ன் மதிப்பு என்ன? சினைகளையும் எழுது.

IV. (a) $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\infty$ ஆனல்,

$x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\ldots\ldots\infty$ என நிரூபி.

(b) $\frac{a+bx}{e^x}$ ன் விரிப்பில், x^4 ன் கெழு ஒன்றுகும். x^{10} உடைய உறுப்பு இல்லை. 'a', 'b' மதிப்புகளைக் காண்க. x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

V. (a) நான்கு நாணயங்களைச் சுண்டிவிட்டால், இரண்டு தலையும், இரண்டு பூவும் வரக்கூடிய வாய்ப்புகள் எத்தனை?

(b) ஹார்னர் முறையை உபயோகித்து, $x^3-2x-5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தை இரண்டு தசம சுத்தமாகக் கண்டுபிடி.

VI. (a) x ஐப் பொருத்து, அடிப்படை விதிகள் மூலம் e^{2x} ன் வகைக் கெழு காண்க.

(b) x ஐப் பொருத்து வகையிடுக :

(i) $\sqrt{\cos\sqrt{x}}$ (ii) $(4x)^{\sin x}$

(c) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ஆனால்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$ என நிரூபி.

VII. (a) $y = \frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ என்ற வளைவரையின் செங்கோட்டையும், வரை கோட்டடியையும் காண்க.

(b) குறிப்பிடப்பட்ட கன அளவை உடைய கூம்பு வடிவமுள்ள கூடாரத்திற்குக் கூரைபோட மீச்சிறு அளவு கித்தான் தேவைப்பட்டால் அதன் உயரம், $\sqrt{2}$ மடங்கு அடி ஆரத்திற்குச் சமம் என நிரூபி.

VIII. (a) $u = xy\, f\left(\frac{x}{y}\right)$ ஆனால்

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

(b) $xy^2 = 16(x+4)$ என்ற வளைவரையின் மேலுள்ள $(-4, 0)$ என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் கண்டுபிடி.

IX. x ஐப் பொருத்து தொகை யிடுக :

(i) $\frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

(ii) $\frac{1}{3+4\cos x}$

(iii) $\sqrt{x}\log x$

X. (a) $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தை $x=2$ என்ற நேர்கோடு வெட்டும்பொழுது ஏற்படும் சிறுவட்டப் பகுதியின் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

(b) ஒரு பரவளையத்தின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாகப் போடப்பட்ட இரட்டை நெட்டாயத்திற்கும் வளைவரைக்குமிடையே உட்பட்ட பரப்பு முனையில் போடப்பட்ட தொடுவரையை அச்சாக

வைத்து சுற்றுகிறது. சுற்றுகையில் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு என்ன ?

XI. கீழ்வரும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்:

(i) $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$

(ii) $x\,(y-2)\,dx-(x-3)\,(y+4)\,dy=(2-y)\,dx$

(iii) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}\log y=\dfrac{y}{x^2}(\log y)^2$

XII. தீர்க்கவும்:

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+5y=3x^2-2$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=3\sin 3x-5e^{2x}$

செப்டம்பர் 1967

I. (*a*) மூன்றும் படித்தான இரண்டு அணிக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன், அதே படித்தான மற்றொரு அணிக் கோவைக்குச் சமம் என நிரூபி.

(*b*) a, b, c சமமில்லாவிடில், மேலும்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & (a^3+1) \\ b & b^2 & (b^3+1) \\ c & c^2 & (c^3+1) \end{vmatrix} = 0$$

ஆனல் $abc+1=0$ என நிரூபி.

II. (*a*) $|\,x\,|<|$ ஆகவிருக்கும்பொழுது

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\,\ldots\ldots$$

(*b*) தொடரின் எண்ணிலிக்குக் கூட்டுத் தொகை காண்க :

$$1+\frac{2}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{2}{3\,.\,4\,.\,5}+\frac{2}{5\,.\,6\,.\,7}+\ldots\ldots$$

III. (*a*) $\frac{2+x}{4}+\frac{1+x}{2+x}$ ஐத் தோராயமாக $\sqrt{1+x}$ க்குச் சமமென்று எடுத்துக் கொள்வதில் ஏற்படும் பிழை, x சிறியதாகவிருக்கும்பொழுது $\frac{x^4}{27}$ க்குச் சமம் என நிரூபி.

(*b*) நியூட்டன் முறையில் $2x^3-3x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தின் இரண்டு தசம சுத்தமான விடையைக் காண்க.

IV. (*a*) $1-\frac{2-3x}{1!}+\frac{(2-3x)^2}{2!}-\ldots\ldots$ என்ற தொடரில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு டென்னிஸ் ஆட்டத்தில் A க்கும் B க்கும் வெற்றி கிட்டிடும் வாய்ப்பு சமமானது.

(i) A ஐந்து ஆட்டங்களும், B 3 ஆட்டங்களும்

(ii) A நாலு ஆட்டங்களும், B 2 ஆட்டங்களும் ஜயித்தால் A முழு ஆட்டத்தில் (set) ஜயிப்பதன் வாய்ப்புகள் என்ன ?

V. (*a*) இரு சார்புகளின் ஒன்றை ஒன்று வகுக்கும் பொழுது ஈவின் வகைக் கெழு காணும் விதியை எழுதி நிரூபணம் செய்க.

(*b*) x ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண்க :

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

(ii) $2x^{3-2x}$

(*c*) $x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ ஆனல், $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

VI. (*a*) $y=e^{\sin^{-1}x}$ ஆனல்

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-y=0$$ என நிரூபி.

(b) B என்ற கப்பல் A என்ற கப்பலுக்கு 75 கி.மீ. நேர் கிழக்கே உள்ளது. B மணிக்கு 12 கி. மீ. வேகத்தில் நேர் மேற்கே செல்வதாகவும், A மணிக்கு 9 கி. மீ. நேர் தெற்கே செல்வதாகவும் இருந்தால், இவ்விரண்டு கப்பல்களும் ஒன்றுக்கொன்று எப்பொழுது நெருங்கியிருக்கும் எனக் காண்க.

VII. (a) $y=f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு, (x, y) என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் காண்.

(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ என்ற வளைவரையில், $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

VIII. (a) $u = \log \tan \dfrac{y}{x}$ ஆனால்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$ என நிரூபி.

(b) $xy = 4$; $x^2+y^2=8$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டுகையில் ஏற்படும் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

IX. x ஐப் பொருத்து தொகை காண் :

(i) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}$

(ii) $e^{-x} \cos 2x$

(iii) $\dfrac{x^2}{(4+x^2)^{5/2}}$

X. (a) $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்டம், $x = 3$ என்ற நேர் கோட்டை அச்சாகச் சுற்றும்பொழுது ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

(b) $y=4-x^2$ என்ற வளைவரையின் முதற் கால்பகுதியிலுள்ள பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

XI. (a) கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(i) $\dfrac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos 2y$

(ii) $(6x^2+2y^2)\,dx - (x^2+4xy)\,dy = 0.$

(*b*) தொடுகோட்டடி x ஆயத்தின் வர்க்கத்தின் தலை கீழ் விகிதத்தில் மாறினால் வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்.

XII. (*a*) தீர்க்கவும் :

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 3e^{-3x}$$

(*b*) தீர்க்கவும் :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 10y + 37\sin 3x = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ஆகவிருக்கும்பொழுது y ன் மதிப்பையும் காண்க. $x=0$ ஆகவிருந்தால், $\frac{dy}{dx}=0,\ y=3$ ஆகும் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஏப்ரல் 1968

I. (*a*) $(x + x^2 + x^3 + x^4)^7$-ல் x^{12} ன் கெழுவைக் காண்க.

(*b*)
$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6$$

என நிரூபி.

II. (*a*) $x^2y = 2x - y,\ x < 1$ ஆகவிருக்கும் பொழுது

$$y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

என நிரூபி.

(b) தொடரில் எண்ணிலிக்குக் கூட்டுத் தொகை காண்.

$$\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \ldots\ldots$$

III. (a) ஹார்னர் முறையை உபயோகித்து, $x^3+2x-10=0$ என்ற சமன்பாட்டின், மெய் மூலத்தை மூன்று தசம சுத்தமாகக் கண்டுபிடி.

(b) ஒரு கணக்கைத் தீர்க்க, A க்கு எதிராக வாய்ப்புகள் 4 to 3. B க்குச் சாதகமாக 7 to 5. இவ்விருவரும் அக்கணக்கைத் தீர்க்க வாய்ப்புகள் என்ன என்று கண்டுபிடி.

IV. (a) x ஐப் பொருத்து, அடிப்படை விதிகள் மூலம் e^{ax} ன் வகைக் கெழு காண்.

(b) x ஐப் பொருத்து வகைக் கெழு காண்க.

(i) $x^{\sin^{-1} x}$ (ii) $\cos^2 (\log x^2)$.

(c) $y = \dfrac{(2-3x)}{(1-2x)}$ ஆனால்,

$$2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$ என நிரூபி.

V. (a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ என்ற நீள்வட்டமும், $x^2 - y^2 = 8$ என்ற அதிபரவளையமும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிரூபி.

(b) நீராவிக் கப்பலைத் தண்ணீர் மூலம் செலுத்தத் தேவையான உந்து விசை அதன் வேகத்தின் கனத்தைப் பொறுத்து மாறினால், மணிக்கு c கி. மீ. செல்லும் தண்ணீர் வேகத்தின் எதிராகச் செல்லும் கப்பலுக்கு மீக்குறைந்த செலவு என்ன என்று கண்டுபிடி.

VI. (a) $u = c \tan^{-1} \cdot \frac{x}{y}$ ஆனால் $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ ஐக் கண்டு,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$ எனவும் காண்.

(b) $x^2y = 3(x^2 + y^2)$ என்ற வளைவரையில் $(-6, 6)$ என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் கண்டு பிடி.

VII. x ஐப் பொருத்துத் தொகை காண் :

(i) $e^x \cos^2 x$

(ii) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$

(iii) $\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}$.

VIII. (a) $8y^2 = x(x-4)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையம் x அச்சைச் சுற்றுகிறது. ஏற்படும் திடப் பொருளின் க. அளவு என்ன ?

(b) $x^2 + 8y = 0$, $x = y^2$ என்ற பரவளையங்களுக்கு இடையேயுள்ள பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

IX. (a) கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(i) $(2x - 10y^3)\frac{dy}{dx} + y = 0$

(ii) $x \sin\frac{y}{x}\, dy = \left(y \sin\frac{y}{x} - x\right) dx$

(b) ஆதிக்கும், ஏதோ ஒரு புள்ளியில் போடப்பட்ட தொடுவரைக்கும் இடையே அகப்பட்ட x அச்சின் பகுதி, x ஆயத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமானல், வளைவரை $(1, 2)$ என்ற புள்ளியில் செல்வதுமாக விருந்தால் வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

X. தீர்க்கவும் :

(i) $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 3\cos 3x - 2e^{2x}$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2 - x^2$

செப்டம்பர் 1968

I. (a) $\dfrac{a + bx}{(1 - x)(2 + 3x)^2} = 1 + x + \ldots\ldots$ என்ற விரிப்பில் a, b-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(b) a, b, c மூன்று அடுத்தடுத்த எண்களைக் குறிக்குமானல்,

$$\log b = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \ldots\ldots$$ என நிரூபி.

II. (a) இரண்டு மூன்றும் படித்தான அணிக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலம், அதே படித்தான மற்ெருரு அணிக் கோவைக்குச் சமம் என நிரூபி.

(b) a, b, c சமமில்லாவிடில், மேலும்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & (1+a^3) \\ b & b^2 & (1+b^3) \\ c & c^2 & (1+c^3) \end{vmatrix} = 0$$ ஆனுல்

$1 + abc = 0$ என நிரூபி.

III. (a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மூலத்தை இரண்டு தசமசுத்தமாக நியூட்டன் முறையில் காண்க.

(*b*) ஒரு வட்ட மேஜையைச் சுற்றி 10 பேர்கள் அமர் கிறார்கள். இரண்டு குறிப்பிட்ட மனிதர்கள் சேர்ந்து இல்லாமல் உட்காருவதற்கு எதிராக உள்ள வாய்ப்புகள் எவ்வளவு?

IV. (*a*) -ஐப் பொருத்து வகைக் கெழு காண்க.

$$\text{(i)}\ \frac{x\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\text{(ii)}\ \sin^{-1}\left(\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}\right)$$

(*b*) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ ஐப் பொருத்து $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ன் வகைக் கெழு காண்க.

(*c*) $y = \tan^{-1} x$ ஆனுல்

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=0$$ எனக் காண்க.

V. (*a*) $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் கோட்ட ஆரையைக் கண்டுபிடி.

(*b*) $y = c \log \sec\left(\dfrac{x}{c}\right)$ என்ற சமநெருக்க முடைய சங்கிலி வளைவரையின் கோட்ட ஆரை $c \sec \dfrac{x}{c}$ என நிரூபி.

VI. (*a*) $u = \log(x^2+y^2)$ ஆனுல் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ என நிரூபி.

(*b*) ஒரு நீராவிக் கப்பலை உந்த தேவைப்படும் H.P. வேகத்தின் கனத்தைப் பொறுத்தும் நீளத்தின் வர்க்கத்தைப் பொறுத்தும் மாறுவதானுல், வேகத்தில் 2 சத வீத அதிகரிப்பும், நீளத்தில் 3 சத வீத அதிகரிப்பும் H.P. யில் 12 சத வீத அதிகரிப்பால் ஏற்படக் கூடும் என நிரூபி.

VII. மதிப்பிடுக :

(a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 7\cos x + \sin x}$

(b) $\int_0^1 x \sin^{-1} x \, dx$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 \, dx}{(4 + x^2)^{5/2}}$

VIII. (a) செவ்வகலத்தால் துண்டிக்கப் பட்ட பரவளையத்தின் வில்லின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

(b) $x = 0$, $x = \pi$ என்ற எல்லைகளுக்குள்ளும், x அச்சுக்கும், $y = \sin x$ என்ற வளைவரைக்குமிடையே உள்ள பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

IX. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(a) $\sqrt{a + x}\frac{dy}{dx} + x = 0$

(b) $(x - y - 2)\, dx - (2x - 2y - 3)\, dy = 0$

(c) $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$

X. தீர்க்கவும்:

(a) $4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 2e^{x/2}$

(b) $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 3y = 4 \cos 7x \cos x$

ஏப்ரல் 1969

I. (a) மதிப்பிடுக:

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & (ac+c^2) \\ (a^2+ab) & b^2 & ac \\ ba & (b^2+bc) & c^2 \end{vmatrix}$$

(*b*) ஹார்னர் முறையை உபயோகித்து $\sqrt[3]{20}$ ன் மதிப்பை இரண்டு தசம சுத்தமாகக் கண்டுபிடி.

II. (*a*) தொடரில் எண்ணிலிக்குக் கூட்டுத் தொகை காண்க:

$$1 + \frac{4}{6} + \frac{4 \,.\, 5}{6 \,.\, 9} + \frac{4 \,.\, 5 \,.\, 6}{6 \,.\, 9 \,.\, 12} + \ldots\ldots$$

(*b*) $y = \dfrac{x}{x+1}$, மேலும் $0 < x < 1$ ஆனல்

$x - \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3 - \ldots\ldots$ ஐ y ன் அடுக்கு களின் தொடராக எழுதுக.

III. (*a*) கீழ்வரும் தொடரில் x^r ன் கெழுவைக் காண்க:

$$2x - 2 + \frac{(3-2x)^2}{2\,!} - \frac{(3-2x)^3}{3\,!} + \frac{(3-2x)^4}{4\,!} - \ldots\ldots$$

(*b*) 2, 3 எண்கள் குறிக்கப்பட்ட ஒரு நாணயத்தை ஐந்து முறைகள் சுண்டிவிட்டால், கூட்டுத் தொகை 12 ஆக வருவதற்கு வாய்ப்புகள் எவ்வளவு?

IV. (*a*) x ன் இருசார்புகள் ஒன்றை ஒன்று வகுத்துக் கொள்கையில் ஈவின், x ஐப் பொருத்த வகைக் கெழு காணும் விதியை எழுதி, நிருபணம் செய்க.

(*b*) x ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண்:

(i) $\tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$

(ii) $x^{\log x}$

(*c*) $y = \sin^{-1} x$ ஆனல்

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$ என நிரூபி.

V. (*a*) $x = a$ யில், $y = f(x)$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற விதிகளைக் காண்க.

(*b*) ஒரு கட்டிடத்தின் பக்கச்சுவர் ஒரு மரத்தூணுல் தாங்கப் படவேண்டும். அந்த மரத்தூண் 3 மீ. உயரமுள்ள சுவரின் மேல் செல்வதாயும், அச்சுவர் கட்டிடத்திலிருந்து 2·5 மீ. தூரத்தி லிருக்கிறது என்ருல், மரத்தூணின் குறைந்த நீளம் என்ன ?

VI. (*a*) $u = e^{-t}(\sin x + \cos y)$ ஆனுல்,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$ என நிரூபி.

(*b*) ஆதியிலிருந்து $y = \sin x$ என்ற வளைவரைக்குத் தொடுவரைகள் போடப் பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் தொடுபுள்ளிகள் $x^2y^2 = x^2 - y^2$ என்ற வளைவரையின் மேல் அமையும் என நிரூபி.

VII. x ஐப் பொருத்துத் தொகை காண் :

(i) $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

(ii) $x \log(1 + x)$

(iii) $\dfrac{1}{4 + 5\sin x}$.

VIII. (*a*) $t = 0$ விருந்து $t = 2$ வரை, $x = t^2$, $y = t^3$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தைக் காண்க.

(*b*) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் முனைக்கும் அரை செவ்வகலத்துக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு x அச்சைச் சுற்றுகிறது. ஏற்படும் திடப் பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

IX. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்:

(i) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^2 x$

(ii) $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 9$

(iii) $(3x - 7y - 3)\, dy + (7x - 3y - 7)\, dx = 0$

X. தீர்க்கவும்:

(i) $3 \frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} - 5y = 2e^{3x} - 5x$

(ii) $4 \frac{d^2y}{dx^2} - 12 \frac{dy}{dx} + 9y = 7 \sin 2x.$

கலைச்சொற்கள்

GLOSSARY OF TECHNICAL TERMS

Acceleration – திசை வேக மாறுவீதம், வேக வளர்ச்சித்தகவு
Absolutely convergent – அறவொருங்கு
Abscissa – x ஆயம்
Addition theorem on Probability - நிகழ் தகவின் கூட்டுத் தேற்றம்
Algebra – இயற்கணிதம்
Algebraic expression – இயற்கணிதக் கோவை
Algebraic Function - இயற்கணிதச் சார்பு
Amplitude – வீச்சு
Angle-Right – செங்கோணம்
Antilogarithm–எதிர் மடக்கை
Approximate – தோராயமான
Arbitrary – யாதாமொரு
Arithmetic Progression– கூட்டுத் தொடர்
Axis - அச்சு
Axis of revolution-சுற்றலச்சு
Axis—Major - நெட்டச்சு
,, —Minor – குற்றச்சு
Bionomial - Theorem - ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்
Rational Index - விகிதமுறு அடுக்கு
Calculus - நுண்கணிதம்
Calculus, Differential - வகை நுண்கணிதம்
Calculus, Integral – தொகை நுண்கணிதம்
Catenary - சங்கிலியம்
Centre of Curvature-வளைவு மையம்
Centre of Gravity-புவி ஈர்ப்பு மையம்
Chance – வாய்ப்பு
Coefficient – கெழு
Cofactor – இணைச்சிறை
Column – பத்தி
Determinant– அணிக்கோவை
Damped Oscillations–தணித்த வளைவுகள்
Decimal place – தசமத்தானம்
Definite Integral-வரையறுத்த தொகையீடு
Dependent – சார்ந்த
Derivative - வகைக்கெழு
Determinant — Element of - அணிக் கோவையின் மூலகம்
Differential Equation-வகைக் கெழுச் சமன்பாடு
Differential Equation-Partial - பகுப்பு வகைக்கெழு சமன்பாடு
—Homogeneous – சமபடித்தான வகைக் கெழுச் சமன்பாடு
Divergence - விரிவு
Divergent series - விரிதொடர்

Eleminant - நீக்கற்பலன்
Equation – சமன்பாடு
Equation - Degree of - சமன் பாட்டின்படி
Equation – Quadratic – இரு படிச் சமன்பாடு
Error - பிழை
—Absolute-தனிப் பிழை
—Percentage - சதவீதப் பிழை
—Relative – சார் பிழை
Event - நிகழ்ச்சி
Event, Favourable-சாதகமான நிகழ்ச்சி
Event, Mutually Exclusive - ஒன்றை ஒன்று விலக்குந் தன்மையைப் பெற்ற
Event, Compound - கூட்டு நிகழ்ச்சி
Expand - விரி
Exponential Series-அடுக்குக் குறித் தொடர்
Factor - சினை, காரணி
Factor, Prime - பகாக் காரணி
Focus - குவியம்
Force - விசை
Forced Vibration- தணித் ததிர்வுகள்
Function - சார்பு
Function, Continuous-தொடர் புடைச் சார்பு
,, , Increasing - கூடுஞ் சார்பு
,, , Decreasing – குறையுஞ் சார்பு
Function, Homogeneous - சமபடிச் சார்பு
Hyperbolic - அதிபரவளைச் சார்பு
Function, Inverse - நேர்மாறு சார்பு
Function, Odd - ஒற்றைச் சார்பு
Function, Even – இரட்டைச் சார்பு
Function, Inplicit - உட்படு சார்பு
Function, Explicit - வெளிபடு சார்பு
Function, Rational - விகித முறுசார்பு
Function, Irrational - விகித முருசார்பு
Function, Rational Integral – விகிதமுறு முழுச்சார்பு
Geometric Progression – பெருக்குத் தொடர்
Harmonic Progression - இசைத் தொடர்
Hollow – உள்ளீடற்ற
Hyperbola – அதிபர வளைவு
Infinity - எண்ணிலி
Integer – முழு எண்
Integrand - தொகைச் சார்பு
Integrate - தொகையிடு
Integration by parts – பகுதிப் படுத்தித் தொகை காணல்
,, by partial fractions-பகுதிபின்ன முறையில் தொகையிடல்
,, by substitution – பிரதியீட்டுத் தொகையிடல்
Inverse - எதிர் மார்
Lamina - தகடு
Latus Rectum – செவ்வகலம்
Limit – எல்லை
Linear – ஒரு படி
Maximum – மீப்பெறு
Minimum-மீச்சிறு
Minor – சிறு பகுதி
Moment of inertia – நிலைமதிருப்பத்திறன்
Negative – குறை
Normal – செங்கோடு
Operator - செயலி
Origin – ஆதி
Ordinate – y ஆயம்
Parabola – பர வளைவு
Parametric Equation - துணையலகுச் சமன்பாடுகள்
Particular Integral – சிறப்புத் தீர்வு
Positive - மிகை

Probability - நிகழ் தகவு
Proof - தெரிப்பு
Quadrant – கால்பகுதி
Radius of curvature - கோட்ட ஆரை
Range - வீச்சு
Real – மெய்யான
Repeated factor - மடங்கு சினை
Rigid - விறைப்பான
Root - மூலம்
Subtangent-தொடுகோட்டடி
Subnormal-செங்கோட்டடி
Successive defferentiation – தொடர் வகைக்கெழு
Surface Area – புறப்பரப்பு
Term - உறுப்பு
Theorem - தேற்றம்
Transformation - உருமாற்றம்
Turning Point-திரும்பற்புள்ளி
Variable - மாறி
,, Dependent – சார்ந்த மாறி
,, Independent - சாரா மாறி
Volume - கன அளவு, பருமம்
Zero - சுன்னம், பூச்சியம்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை - 9

1969 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

				ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்		6	50
*1a.	,, II	,,		9	00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி		12	00
3.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்-I	தி. சி. மோகன்		12	00
4.	,, ,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்		10	75
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்		7	00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும்—II	சி. வேலாயுதம்		11	50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்		7	50
*8.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்		5	50
*9.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்		4	75
10.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்		10	00
11.	,, II	எம். லூர்துநாதன்		4	25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்		10	75
13.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்		10	50
14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு-I	கீ. சீ. இராமசாமி		6	00
15.	,, ,, II	,,		6	00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி மோகன்		5	00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்		11	00

*மூலநூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

18.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—II	பி. வி. சீனிவர்சன்	6	50
19.	,, ,, III	,,	6	50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்-I	மா. குமாரசாமி	10	00
21.	,, ,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
23.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*25.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
26.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	தூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
27.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
28.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*29.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
30.	பன்னுட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
31.	,, ,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
33.	,, ,, II	,,	7	00
34.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்கநிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
36.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
38.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857-1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
39.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*40.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*41.	,, ,, II	,,	9	75
*42.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா	4	50
43.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
44.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
45.	,, ,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
46.	,, ,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
47.	,, ,, IV	,,	8	00
48.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க த திருநாவுக்கரசு	15	00
49.	,, ,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
50.	,, ,, III	,,	5	00
51.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
52.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
53.	,, ,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	00
54.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
55.	,, ,, II	,,	7	00
56.	,, ,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
57.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
58.	,, ,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
59.	,, ,, ,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
60.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
61.	,, – II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75

*மூலநூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

62.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
63.	,, ,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணமலை	6	75
64.	,, ,, III	இரா. அண்ணமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
65.	,, ,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
66.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
67.	,, ,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
68.	,, ,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
69.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
70.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*71.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
72.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
73.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
74.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
75.	,, II	,,	13	25
76.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
77.	,, ,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
78.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
79.	,, ,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
80.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
81.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
82.	,, ,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

83.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—III	கி. ர. அனுமந்தன்		
*84.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
85.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
86.	சமுக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
87.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
88.	,, ,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
89.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

90.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
91.	,, II	,,	7	00
92.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
93.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
94.	,, II	,,	9	00
95.	சமுக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
96.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
97.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*98.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

*மூலநூல் (Original Book)

தத்துவம்

99.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*100.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*101.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
102.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
103.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
104.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3	50
105.	,, II	,,	6	00
106.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

107.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

108.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50

மானிடவியல்

*109.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
110.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்ரமணியம்	5	50
111.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

112.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50

புவியியல்

113.	ஆசியா – I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
114.	,, II	,,	8	75
115.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*116.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*117.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
*118.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*119.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*120.	,, ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*121.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*122.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	9	00
*123.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*124.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
125.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
126.	,, II	,,	5	00
127.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
128.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
129.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
130.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
131.	,, ,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
132.	,, ,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்		

*மூலநூல் (Original Book)

புள்ளியியல்				
*133.	புள்ளியியல் - அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00
134.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
135.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14	00
136.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50
உயர்கணிதம்				
*137.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12	50
*138.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8	00
*139.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9	00
விலங்கியல்				
*140.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	12	00
பௌதிகவியல்				
141.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00
விஞ்ஞானம்				
*142.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*143.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*144.	எக்ஸ்–கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*145.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3	50
*146.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*147.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*148.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

மருத்துவம்

*149.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
150.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*151.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
*152.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
153.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி,	6	75
154.	,, II	டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது.	5	50
155.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன் ”	7	25

பொறியியல்

156.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட் டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

157.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

*158.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

159.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
160.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00

*மூலநூல் (Original Book)

*161.	சேமக் கை நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*162.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*163.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கிடகிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C.)

*164.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	50
*165.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*166.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடையபிள்ளை	2	50
*167.	,, ,, II	,,	2	25
*168.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*169.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*170.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*171.	,, II	,,	3	00
*172.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*173.	,, II	,, ,,	4	50
*174.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*175.	,, II	,,	3	25
*176.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*177.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*178.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*179.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை	7	25
*180.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	50

*மூலநூல் (Original Book)